

Geometri med Maple

Jesper Estrup & Gitte Christiansen

Maple 2023

HVAD HAR DE LÆRT?

Har dine elever lært geometri. eller har de lært at anvende et dynamisk tegneprogram, der ved *click* and *point* tegner og beregner? Hvad har de lært? Har de lært, hvordan de beregner arealet af en geometrisk grundfigur, eller har de lært, hvilke knapper de skal klikke på for at få resultatet?

Mennesket er dovent

Det er rigtigt, at motivation er en væsentlig for læring. Men som enhver, der er blevet god til matematik, ved, kræver det, ud over interessen, hårdt og gentaget arbejde. Og her er eleverne ikke andelede skruet sammen end alle andre, *hvorfor arbejde hårdt, når man kan arbejde smart?* Hvorfor anstrenge sig, når maskiner og computere kan klare arbejdet?

Anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer som GeoGebra, eller eksempelvis Desmos, kan resultere i en uheldig *Black Box*, når programmet bruges til fx at lette arbejdet med geometriske beregninger. Eleven har ikke tilegnet sig den nødvendige viden, og kan derfor ikke beregne arealet af en geometrisk grundfigur, men bruger i stedet tiden til at lede efter den rigtige knap, der med et klik udløser et resultat.

Elevernes arbejde bliver derfor ikke nødvendigvis lettere, når de i stedet bruger kræfterne på at finde de rigtige knapper, og samtidigt ikke forstår den logik der ligger bag. Processen ender med at fjerne fokus fra det oprindelige formål, nemlig læring og mestring af emnet. Det hele bliver til et spørgsmål om at lære meningsløse og usammenhængende genveje, der skal aktiveres over for de forskellige typer af opgaver - og det var vel ikke det der var formålet med undervisningen?

En anden tilgang

Vi er af den opfattelse, at den mere analytiske tilgange til geometri, vi her adviserer for, er en mulig løsning og en vej ud af den *sorte boks*.

I bund og grund er det ligegyldigt, hvilket CAS-program man anvender, vi har bare valgt at fokusere på Maple pga. brugervenligheden. Dermed sagt, at mange af de tilgange der beskrives her i bogen, kan med lidt omskrivning også anvendes sammen med andre lignende programmer.

Maple står som en hybrid mellem lethed i et dynamiske tegneprogram og programmeringens kompleksitet. På den ene side er programmet hurtigere

at anvende end arbejdet med papir og blyant, på den anden side er det mere besværligt end GeoGebra, fordi starten er et blankt stykke papir, hvor eleven med kodning som blyant, lineal og passer, konstruerer de geometriske figurer.

Vi mener, at eleven skal bevæge sig ad den stenede vej mod målet og ikke vælge den letteste sti. Deri finder de motivationen; glæden ved at mestre en opgave og samtidigt have en dybere forståelse.

Mine elever synes at det er svært

At eleverne finder matematik, også lette områder som geometri, svært, har at gøre med den måde, vi forsøger at undervise i matematik på i skolen.

Matematik er i sig selv ret krævende, fordi den kræver to modstridende kvaliteter: på den ene side kreativitet i idéen, men på den anden side absolut stringens og fastholdelse af kursen i udførelsen. Det er ikke alle, der formår at kunne forene alt dette.

Desværre er matematik i det moderne kompetenceorienterede system, reduceret til et sæt af anbefalinger og værktøjer, samt et katalog af formler og opskrifter på deres anvendelse, frem for forståelse.

Virtuous circle

Forskning har vist, at lærerne er de vigtigste i denne henseende: Hvis de formår at motivere eleverne, inspirerer det til læring. Lærere, der underviser godt, spændende og klart, kan øge elevernes læring - og gode læring øger glæden ved at lære.

Der skal være større fokus på positiv og meningsfuld feedback. Det skal hjælpe eleverne til at lære af deres fejl, og til at få en følelse af at have opnået noget i matematik - og dermed forbedre deres holdning til faget på lang sigt.

Vi ved af erfaring, at dem, der forbinder matematik med noget positivt lærer bedre, og at dem, der kun forbinder matematik med noget negativt, har sværere ved at lære, hvilket igen forstærker deres modvilje og præstation.

Opsamling

Der er mange veje til Rom, hedder det sig, og vi kommer ikke med noget entydigt svar på, hvordan man bedst underviser i geometri, men vil efter bedste evne forsøge at give et bud på, hvorledes man ved hjælp af et CAS-værktøj kan arbejde med *forståelsen frem for værktøjet*, altså bryde med black box problematikken, og skabe en *virtuous circle* (dydens 'nødvendige' cirkel).

Vi er ikke imod anvendelsen af dynamiske geometriværktøjer eller CAS-programmer der letter udførelsen af arbejdsgangen, men vi er imod den værktøjs-

tøjsorienterede kompetencetilgang, hvor det at løse en opgave reduceres til den korrekte anvendelse af tastaturgenveje eller klik det rigtige sted med en mus, før eleven har opbygget en forståelse og en indsigt.

Det er vores opfattelse, at kompetencen at kunne huske, er vigtigere end evnen til at klikke på en knap, at træningen af hjernen er lige så vigtig, som en kritisk tilgang til det man beskæftiger sig med, og at indholdsløs efterabning af procedurer skader mere end det gavner.

Tag ikke fejl, også i CAS-programmer som Maple, er der kommandoer der giver løsningen væk. Eleven behøver ikke at regne. Vi beder bare om, ikke at fortælle om hemmeligheden lidt endnu.

Vi håber, at du finder inspiration og motivation i anvendelsen af bogen!

Hilsen Jesper og Gitte

BEGYNNELSEN

Hvad er analytisk geometri? Den analytiske geometri er en tilgang til geometrien, hvor vi arbejder med geometriske figurer i et koordinatsystem. Inden for analytisk plangeometri arbejder eleverne med at beskrive linjer og cirkler, og deres placering i et koordinatsystem, ved hjælp af algebraiske beregninger.

Geometripakken

Maple er pakkeorienteret. I stedet for at have hele programmet, med alt hvad det kan, kørende på din computer, og dermed dræne computeren for kræfter, skal vi skrive, hvad vi vil beskæftige os med.

Vi skal i det følgende arbejde med geometri, og derfor fortæller vi Maple, at vi ønsker at arbejde med dette emne, ved i starten af dokumentet at skrive;

with(geometry) :

Andre pakker kan komme på tale, men i denne bog gælder, at når der står, at vi arbejder med noget i *geometripakken*, skal dette skrives først!

Punktet og geometripakken

Det hele starter med et *punkt*. Et punkt ingen udstrækning. Det betyder, at det ikke har nogen længde, bredde eller højde. Det er en abstrakt idé, der bruges til at repræsentere en præcis placering i rummet.

Vores rum er et to-dimensionalt retvinklet koordinatsystem. Det består af to tallinjer, såkaldte akser, der står vinkelret på hinanden. Den vandrette linje kaldes for det meste for x-aksen eller førsteaksen, mens den lodrette oftest kaldes y-aksen eller andenaksen

Det er i det rum, vi tegner vores abstrakte idé om et punkt.

I Maple vil skal punktet først navngives og defineres. Lad os til eksempel give punktet navnet A, og placere punktet i $(x, y) = (2, 2)$;

with(geometry) :

point(A, 2, 2)

A

Vi ser, at navnet på punktet står først, og koordinaterne står efter navnet. I Maple er *syntaksen*, altså *rækkefølgen vi skriver vores kommandoer, navne*

og punkter i, vigtige for at Maple kan forstå, hvad det er vi vil have programmet til at udføre.

Vi ser også at Maple returnere med et `A`. Det fortæller os, at punktet er oprettet korrekt.

Ønsker jeg ikke at Maple returnere med et `A`, sætter jeg et kolon således;

```
with(geometry) :
```

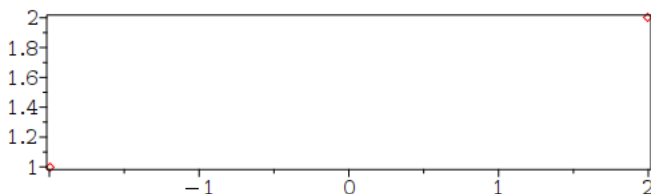
```
point(A, 2, 2) :
```

Lad os oprette endnu et punkt `B`, og tegn begge punkter i et koordinatsystem. Det gør vi ved at fortsætte med;

```
with(geometry) :
```

```
point(A, 2, 2), point(B, -2, 1)
```

```
draw([A, B])
```



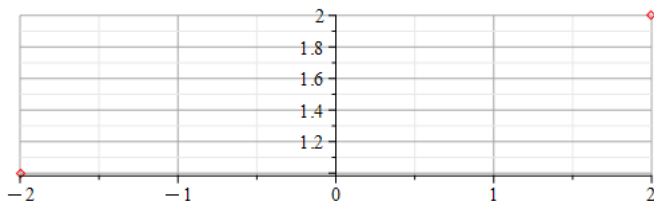
Det ser ikke ud, som vi forventede, koordinatsystemet er ikke centreret og der er ingen gitterlinjer der kan hjælpe os med at se, om punkterne nu også er placeret korrekt.

Jeg har to muligheder. Enten anvender jeg mulighederne i kontekstmenuen (`Axes → Normal`) og værktøjslinjen (`Toggle gridlines`), eller jeg tilføjer selv, hvad jeg ønsker der skal være. Jeg vælger det sidste, for at bevare kontrollen.

```
with(geometry) :
```

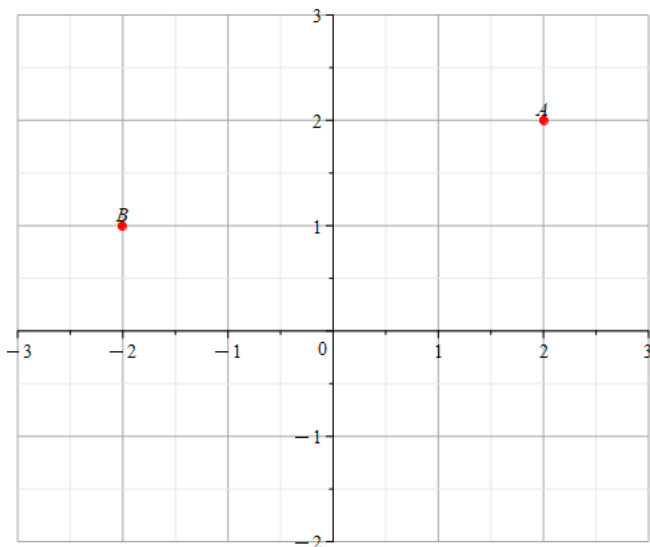
```
point(A, 2, 2), point(B, -2, 1)
```

```
draw([A, B], axis = [gridlines, location = origin])
```



Vi er stadig ikke tilfredse: Vi ville gerne tilføje navnene på punkterne A og B , og gerne have se lidt mere af koordinatsystemer. Derfor tilføjer vi kommandoen `printtext=true`, og fortæller Maple, at x -aksen skal gå fra -3 til 3 , samt y -aksen skal gå fra -2 til 3 ;

```
with(geometry) :  
point(A, 2, 2), point(B, -2, 1)  
draw([A, B], axis = [gridlines, location = origin], view = [-3..3, -2..3],  
printtext = true)
```



Linjen

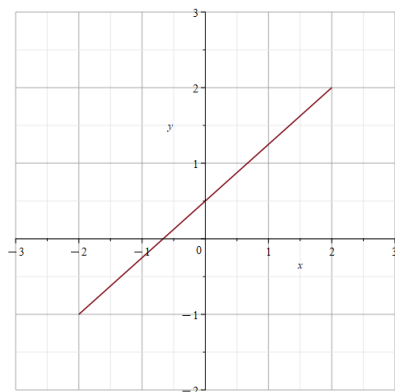
En linje er uendelig lang og har ingen bredde eller højde. Et *linjestykke* forbinder punkter, en linje kan gå gennem to eller flere punkter.

Tegning af linjestykke

Mellem vores to punkter A og B kan vi tegne et linjestykke.

```
plot([[2, 2], [-2, -1]], x = -3..3, y = -2..3)
```

Læg mærke til, at når vi tegner et linjestykke, skal vi skrive hvorfra og hvortil i firkantede parenteser.



Tegning af linje gennem to punkter

Skal vi tegne en linje gennem to punkter, bruger vi kommandoen *draw* og *line* fra *geometripakken*.

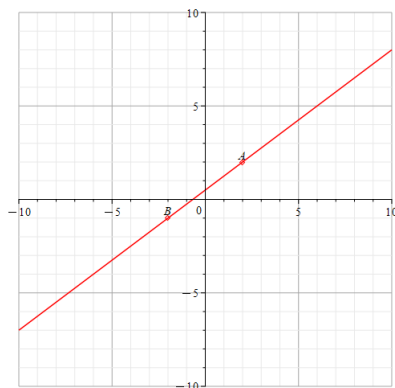
Først kalder vi *geometripakken*, dernæst definerer vi vores to punkter *A* og *B* samt linjen *l*, og tegner linjen ved hjælp af kommandoen *draw*.

with(geometry) :

point(A, 2, 2), point(B - 2, -1) :

line(l, [A, B])

draw([l, A, B], axis = [gridlines, location = origin], printtext = true)



Som før, under tegning af punktet, har vi valgt at tilføje nogle kommandoer, der gør det lettere at aflæse linjen i koordinatsystemet.

Med *geometripakken* har vi nogle muligheder, der gør det let at finde fx afstanden mellem de to punkter A og B , samt linjens ligning.

Afstanden mellem A og B ; $distance(A, B) = \sqrt{5}$

Linjens ligning: $Equation(l, [x, y]) = 2 + 3x - 4y = 0$

$([x, y]$ fortæller Maple, at vi har to variable i vores koordinatsystem.)

Koordinatsystemet

Lad os antage, at vi skal tegne en cirkel med centrum i $(x, y) = (2, 2)$ og at cirklen skal have en radius på 4.

Før vi går i gang, må vi gøre os nogle overvejelser omkring, hvilke dimensioner vores koordinatsystem skal have. Vi er altså tvunget at tænke over, hvad det betyder, at cirklen har en radius på 4 i forholdet til placeringen af cirkelns centrum.

Prøv selv, at tænke over det, før du fortsætter læsningen!

Vi er sikre på, at du i dine overvejelser hurtigt kommer til den konklusion, at både x -akse og y -akse bør starte i -3 og slutte i 7 , eller som minimum bør gå fra -2 til 6 .

Før du er kommet til den konklusion, har du måtte tage stilling til, hvor stort koordinatsystemet skal være, og har måttet tage din forestillingsevne, dermed din hukommelse af andre gange, du har beskæftiget dig med en cirkel i et koordinatsystem, i brug.

I Maple konstruerer vi det ønskede koordinatsystem, ved at skrive;

$$plot(x = -3..7, y = -3..7)$$

For at hjælpe os selv, udbygger vi kommandoen med hjælpelinjer (*gridlines*). Gridlines hjælper os med at aflæse punkterne i koordinatsystemet.

$$plot(x = -3..7, y = -3..7, gridlines = true)$$

Her fra, bliver det en anelse mere kompliceret. Vi vælger med vilje at glemme, at Maple har flere forskellige måder at tegne en cirkel på. Vi vil i stedet anvende vores viden om cirklen.

CIRKLEN

Hvad kendetegner en cirkel? En cirkel er bestemt ud fra to ting; et centrum og en radius. Hvis et punkt ligger på cirkelperiferien, så er afstanden mellem punktet og centrum lig med radius. Et sådan punkt P på cirkelperiferien, har koordinaten:

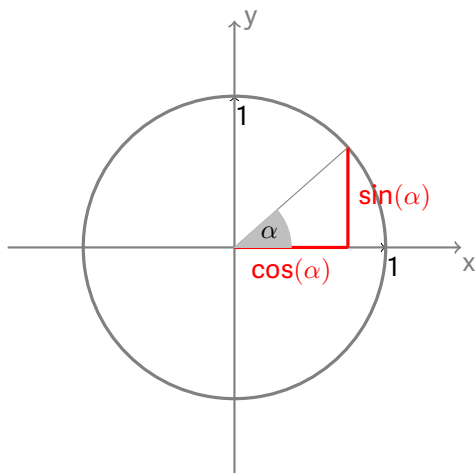
$$P(a \cdot \cos(\alpha), b \cdot \sin(\alpha))$$

Enhedscirklen

En cirkel består af alle de punkter, der har samme afstand til punktet i midten af cirklen, kaldet centrum. Alle punkterne danner til sammen en hel buet linje, som bliver til en cirkel.

Lad os tage udgangspunkt i en sådan cirkel, med centrum i punktet $(0, 0)$ i et koordinatsystem og radius = 1.

Vi ved fra trigonometrien, at ethvert punkt på cirkelperiferien i enhedscirklen har koordinaten $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, hvor α er vinklen.



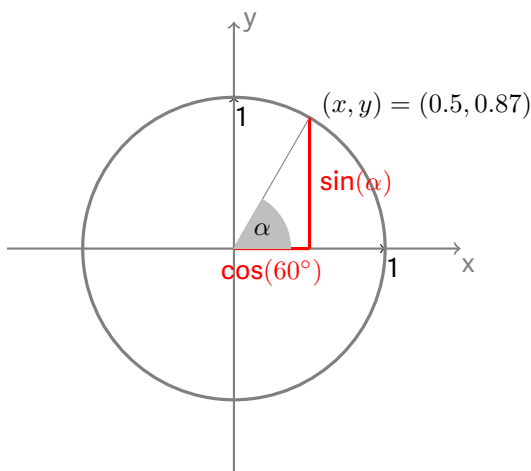
Cosinus og *Sinus* er to funktioner, hvor man sætter en vinkel ind, og resultatet bliver et tal mellem -1 og 1. De kaldes trigonometriske funktioner, fordi man kan bruge dem til at beregne vinkler og sider i en retvinklet trekant.

Alle punkter der danner cirkelperiferien, kan afsættes ud fra de to koordinater $(\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Koordinaterne til punkterne findes gennem de følgende to formler;

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Modstendekatete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Hvis vi fx vil finde koordinaterne i vores enhedscirkel, hvor vinklen α er 60° , er koordinaterne $(x, y) = (\cos(60), \sin(60)) = (0.5, 0.87)$



Pi (π)

Vi kommer ikke uden om π . Cirkler er alle ens, og *omkredsen divideret med diameteren* giver den samme værdi uanset diameter. Denne værdi, som er forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter, skrives π (Pi).

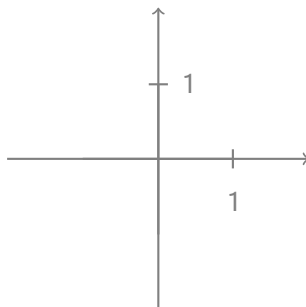
Således, hvis vi bruger omkredsen af vores enhedscirkel (≈ 6.28) og deler med to, får vi;

$$\frac{6.283185307}{2} \approx 3.141592654(\pi)$$

Enhedscirklen siger vi, er 360 grader (eller 2π).

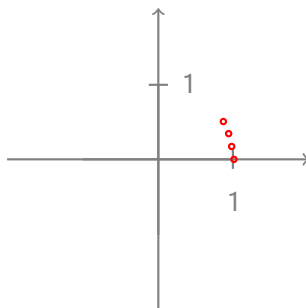
TRÆNING

Tegn et koordinatsystem på et blankt stykke papir.



Find lommeregneren (eller Maple) frem, og indtegn punkterne $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Lad $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ \dots 360^\circ$



Husk, hvis du anvender Maple, at bruge skolepakken (*with(skole)*) før du beregner $\cos(\alpha)$ og $\sin(\alpha)$

Har du gjort det rigtigt, skulle resultatet gerne være punkter der ligger på en cirkel.

VORES CIRKEL

Sikke en rejse vi har været på! Vi har samlet viden om koordinatsystemet, samlet viden om enhedscirklen, cosinus, sinus og π . Vi har nu den viden, der er nødvendig, for at tegne vores cirkel med kommandoen `plot` i Maple.

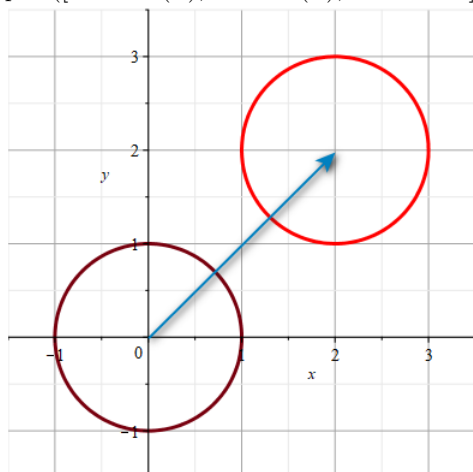
Vi er gået den lange vej, men ved nu en del mere, end hvis vi bare havde benyttet os af et dynamisk geometriprogram. Tillykke!

Vores cirkel

Den viden vi nu har, kan vi benytte os af, når vi vil have Maple til at tegne en cirkel ved hjælp af kommandoen `plot`, men vi er stadig ikke helt i mål, fordi vores cirkel har centrum i punktet $(2, 2)$ og en radius der er fire gange større!

At rykke centrum fra $(0, 0)$ til $(2, 2)$ er let. Det sker ved, at vi lægger to til x -værdien og to til y -værdien.

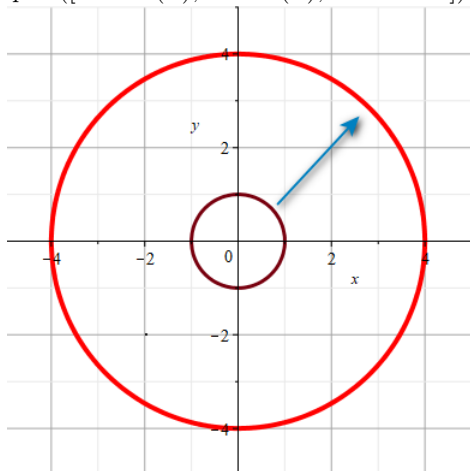
`plot([2 + Cos( $\alpha$ ), 2 + Sin( $\alpha$ ),  $\alpha = 0..360$ ])`



Alle punkter $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ flyttes ved at lægge to til alle de koordinater, der tilsammen danner cirkelperiferien, således $(2 + \cos(\alpha), 2 + \sin(\alpha))$.

At gøre radius fire gange større, gør vi ved at multiplicere henholdsvis cosinus og sinus med fire.

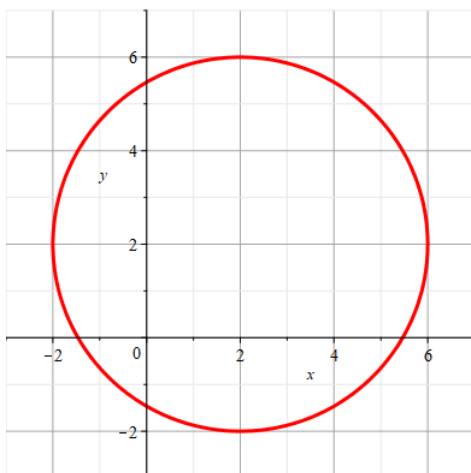
```
plot([4 * Cos(α), 4 * Sin(α), α = 0..360])
```



Ved at kombinere addition og multiplikation med vores *tænkte* koordinatsystem fra begyndelsen, får vi;

with(skole)

```
plot([2 + 4 * Cos(α), 2 + 4 * Sin(α), α = 0..360], x = -3..7, y = -3..7)
```



Opsamling

Du kan nu en metode til at tegne en cirkel i Maple - en af flere (det kommer vi til senere). Svedt tænker du måske; at det var da besværligt! Men metoden har et formål i al sin galskab! Du lærte noget om cirklen.

- Du lærte, at tænke strategisk - at begynde med koordinatsystemet, hvori du skal placere dine geometriske figurer
- Du lærte, hvordan cosinus og sinus til en vinkel beregnes
- Du lærte, hvad π er, og hvordan den beregnes
- Du lærte, at Sinus aflæses på y-aksen og cosinus aflæses på x-aksen
- Du lærte, at cosinus angiver førstekoordinaten, sinus andenkoordinaten, for punktet hvor en linje gennem centrum skærer enhedscirklen i en bestemt vinkel i forhold til x-aksen
- Du lærte, at enhedscirklen har centrum i (0,0) med radius 1. Enhedscirklen er 360 grader (eller 2π)
- Du lærte, at tegne cirklen med kommandoen plot og skolepakke i Maple

TRÆNING



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spil!

Brug metoden til at tegne fem cirkler i Maple, med forskellige radius og forskellige centrum.

Brug formlerne $O = 2 \cdot \pi \cdot r$ eller $O = \pi \cdot d$ til at beregne omkredsen, og $A = \pi \cdot r^2$ til at beregne arealet af dine cirkler.

CIRKLENS LIGNING?

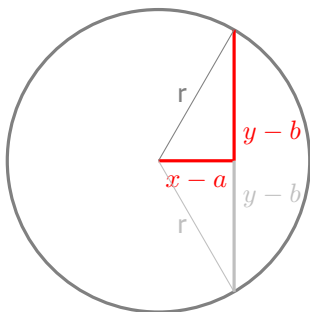
Vi kan bruge cirkelns ligning til at tegne cirklen med i Maple, hvis vi kender centrum og radius. Vi kan ikke bruge kommandoen *plot*, fordi der i ligningen forekommer to ubekendte, men må i stedet anvende kommandoen *implicit-plot*.

Cirkelns ligning

Cirklen med centrum i punktet $c(a, b)$ og radius r er givet ved ligningen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Cirkelns ligning tager udgangspunkt i læren om Pythagoras' retvinklede trekanter, hvor *radius* er hypotenusen i den retvinklede trekant, mens $(x - a)$ er den ene katete og $(y - b)$ den anden.



Ethvert punkt der ligger på cirkelperiferien, kan derfor udledes af $a^2 + b^2 = c^2$. Sætter vi længden af de to kateter $x-a$ og $y-b$ ind i stedet for a og b , og lader hypotenusen c være r , får vi;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Idet vi beskæftiger os med en andengradsligning, får vi to resultater, for hver x -værdi vi sætter ind i ligningen, og dermed to punkter til cirkel samtidigt. Lad os fx. sætte $x = 2$, og finde de to værdier på y -aksen der ligger på cirklen vi arbejder med (se figuren ovenfor):

$$(2 - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow y = 6 \wedge y = -2$$

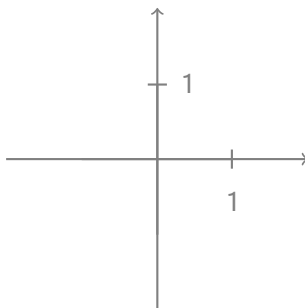
I vores cirkel udregnes *y-værdierne* ved at lade *x-værdien* løbe fra -2 til 6, og på samme måde, som da vi arbejdede med cosinus og sinus, vil punkterne til sidst danne en cirkel.

TRÆNING

Denne træningsfunktion fungerer bedst i et CAS-program. Du kan også vælge at løse opgaverne i hånden, og med en lommeregner til kvadratrodsberegningerne, hvis du foretrækker det.



Tegn et koordinatsystem på et blankt stykke papir.



Lad *x* løbe fra -2 til 6 med følgende værdier;

$x = -2, x = -1.5, x = -1 \dots x = 6$ (lad *x* stige med en halv fra -2 til 6 og $y = 2$)

Sæt *x-værdierne* ind i formlen: $(x - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 4^2$

(Du kan nøjes med at løse ligningen; $(x - 2)^2 = 4^2$, fordi $(2 - 2)^2 = 0$)

Afsæt punkterne $(x, 2)$ i koordinatsystemet. Har du regnet rigtigt, kan du ane konturen til den cirkel vi arbejder med.

Afprøv nu samme øvelse med en cirkel der har centrum i $(1, 3)$ og radius $r = 3$. Husk at gøre dig nogle overvejelser omkring, hvilke dimensioner dit koordinatsystem skal have. (Hint! x-aksen bør starte i -2)

Tegn en cirkel med implicitplot

For at kunne anvende kommandoen *implicitplot*, skal vi i Maple starte med at hente pakken *with(plots)*. Kommandoen kræver ydermere, at få at vide, inden for hvilke intervaller for x og y cirklen er placeret for at fungere.

Lige som da vi begyndte, er du altså nødt til at gøre dig dine forestillinger om, hvordan dit koordinatsystem skal se ud.

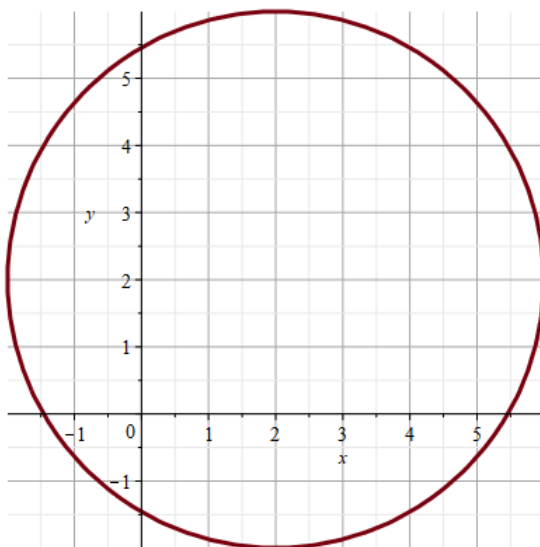
Vi vil bruge samme opgave, som da vi tegnede cirklen ved hjælp af $\cos(\alpha)$ og $\sin(\alpha)$; vi skal tegne en cirkel med centrum i $(a, b) = (2, 2)$ og cirklen skal have en radius $r = 4$.

Vi ved nu, at ethvert punkt på cirkelperiferien kan udledes af den retvinklede trekant, der har sit udspring fra cirkelns centrum, og at længden af de to kateter, vi før beskrev som $\cos(\alpha)$ og $\sin(\alpha)$, kan skrives som $(x - a)$ og $(y - b)$.

I Maple ser det således ud:

with(plots) :

implicitplot $((x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4^2, x = -3..7, y = -3..7)$



For at vi kan anvende *cirkelns ligning* til at tegne cirklen, er vi nødt til at omskrive ligningen, således at lighedstegnet forsvinder. Vi eliminerer lighedstegnet, ved at trække r^2 fra på begge sider, og får;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

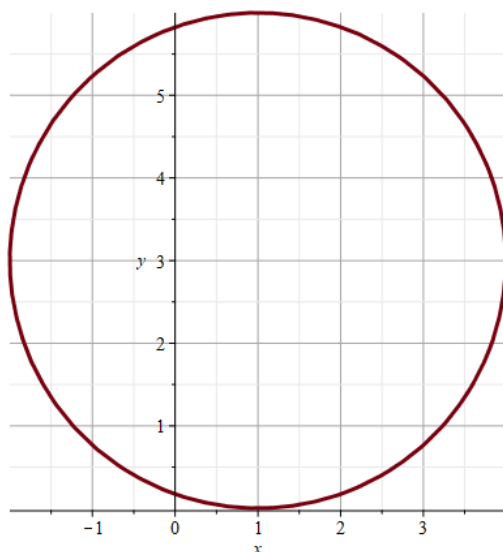
Vi har nu en forskrift, vi kan anvende til at tegne en cirkel med, når vi kender centrum (a, b) og radius (r) . I vores tilfælde er $(a, b) = (2, 2)$ og $radius(r) = 4$. Hvis cirkelens centrum i stedet var $(a, b) = (1, 3)$ og $radius(r) = 3$, ville ligning og cirkel se således ud...

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 3^2$$

Ligningen sat in i Maple, giver følgende resultat;

with(plots) :

implicitplot((x - 1)^2 - (y - 3)^2 - 3^2, x = -2..6, y = -1..6)



Opsamling

Til at tegne ligninger i Maple, bruges kommandoen *implicitplot*. Navnet på denne kommando kommer af, at en ligning i x og y , implicit *definerer* y som en funktion af x .

Syntaksen for kommandoen svarer til syntaksen for *plot*-kommandoen, men i stedet for en funktion tegnes en ligning, og både x - og y -interval skal angives, således;

implicitplot(ligning, x = a..b, y = c..d)

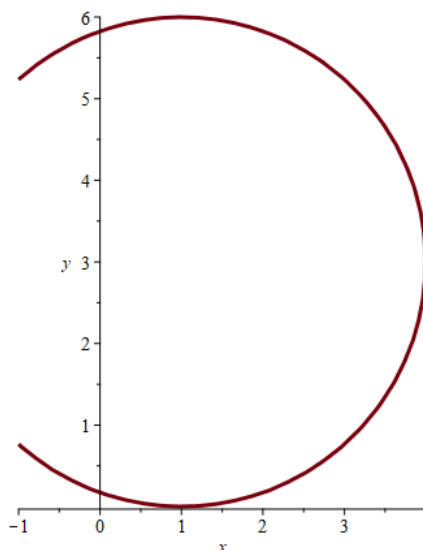
For at få adgang til funktionen *implicitplot*, skal pakken *(plots)* indlæses først. For at indlæse *plots*-pakken skal du indtaste kommandoen *with(plots)*:

Plots-pakken behøver kun at blive indlæst én gang i en session. Alle de plotmuligheder, der er tilgængelige for **plot**, kan også bruges med **implicitplot**.

Det er vigtigt at gennemtænke koordinatsystemet, ellers tegnes kun en del af cirklen, fx;

with(plots) :

implicitplot((x - 1)² + (y - 3)² - 3², x=-1..6, y=-1..6)



TRÆNING



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spill!

Brug metoden til at tegne fem cirkler i Maple, med forskellige radius og forskellige centrum.

Brug formlerne $O = 2 \cdot \pi \cdot r$ eller $O = \pi \cdot d$ til at beregne omkredsen, og $A = \pi \cdot r^2$ til at beregne arealet af dine cirkler.

CIRKEL MED GEOMETRIPAKKEN

Geometri-pakken i Maple indeholder kommandoer, der er brugbare i arbejdet med geometri. Pakken er udformet til at anvende sammen med de grundlæggende geometriske og algebraiske færdigheder.

Brug af geometripakken til at tegne cirklen

Nu (endelig) kommer den del, hvor det at tegne cirklen gøres uden at bruge *cosinus*, *sinus* eller en *ligning*.

Grunden til, at kommandoerne og metoderne først kommer nu, er, som allerede nævnt, for at du skulle have muligheden for, at opnå et dybere kendskab til, hvad en cirkel er, og hvordan cirklen tegnes i et koordinatsystem.

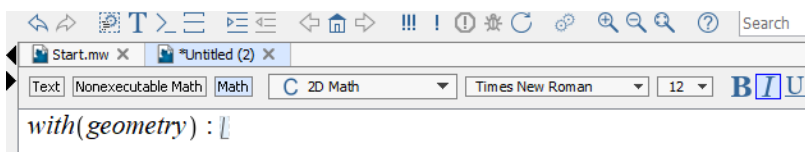
Oven i købet, er du også blevet bedt om at tage de to formler for *areal* og *omkreds* i brug til dine beregninger.

Alt dette er umiddelbart mere besværligt end at anvende et dynamisk geometritegneprogram, som fx GeoGebra, men den indsigt du har opnået, var aldrig blevet den samme.

Tegning af en cirkel med geometripakken

Vi kan tegne cirkler på tre måder med geometripakken i Maple, enten ved at bruge *cirkelns ligning*, ved at angive cirkelns *centrum* og *radius*, eller ved at angive *tre punkter* som cirklen skal gå igennem - den sidste metode er især anvendelig, når vi skal tegne den *omskrevne cirkel* til en trekant eller regulær polygon.

Maple vil gerne have at vide, hvad det er vi skal arbejde med. I dette tilfælde er det geometri, derfor starter vi med at hente *geometripakken*, ved at skrive...



I det følgende skal vi anvende nogle kommandoer, der får Maple til at udføre, hvad vi vil have tegnet og udregnet.

Syntaksen, dvs. hvordan kommandoen er opbygget, skal overholdes for at Maple kan forstå, hvad vi gerne vil have programmet til at udføre.

Vi vil fortsætte med at arbejde med den cirkel vi hele tiden har haft som udgangspunkt; en cirkel med centrum i punktet (2,2) og med en radius på 4.

Først skal vi kigge på *syntaksen* til den mest almindelige opgavetype, hvor opgaven går ud på at tegne en cirkel med et given centrum og en given radius.

Tegning af en cirkel ud fra et punkt og en radius

Syntaksen i Maple, når vi skal tegne en cirkel ud fra et centrum i $C=(2,2)$ og en radius $r = 4$, er;

```
with(geometry) :  
circle(navn, [C, r])
```

Først skal vi definere og navngive vores centrum. Navngivningen er vigtig for vores videre arbejde med at finde centrum og areal. Et centrum er et punkt (*point*), der skrives således;

```
with(geometry) :  
point(C, [2, 2]) :
```

Vi skal nu definere cirklen, dvs. *give cirklen et navn*, skrive hvor *centrum* befinder sig, og hvilken *radius* cirklen skal have.

```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])
```

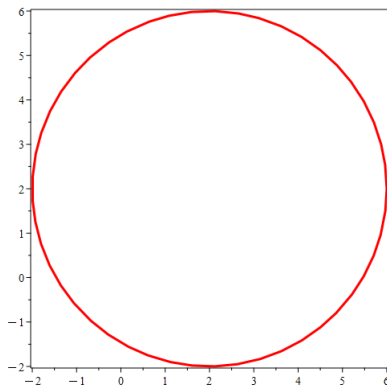
Navnet for centrum, behøves ikke at være C1, lige som at cirkelens navn ikke behøves at være c1. Det kunne være et hvilket som helst navn. (C)entrum kunne lige så godt have været *centrum*, og c1 kunne lige så godt have været *cirkel_1*.

Vi anvender her C1 som forkortelse for centrum, og c1 som forkortelse for cirkel 1. Skal vi tegne og lave beregninger med en anden cirkel, ville vi kalde cirkelens centrum for C2, og cirklen for c2, og så fremdeles.

Nu kan vi, efter at have defineret centrum og cirkel, tegne cirklen med kommandoen *draw* (tegn). Kommandoen kan tegne flere figurer i samme tegning.

Vi skal have Maple til at tegne vores cirkel med centrum i (2,2) og radius 4.

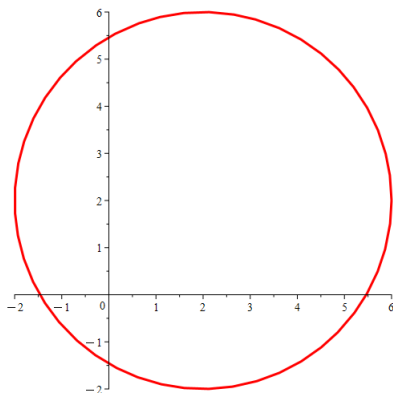
```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])  
draw(c1)
```



Koordinatsystemets akser (*axis*) er ude i kanten på venstre side af cirklen. Hvis x-akse og y-akse skal krydse hinanden i (0,0), skal vi tilføje:

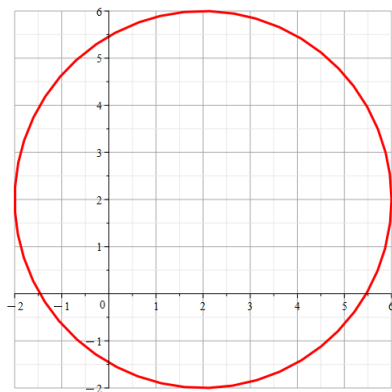
axis = [location = origin]

```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])  
draw(c1, axis = [location = origin])
```



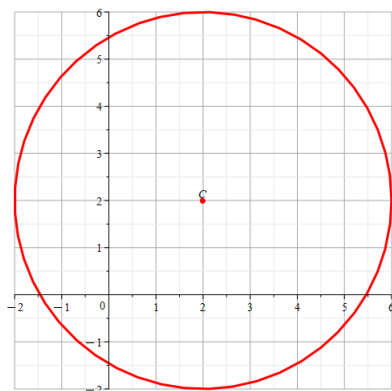
Skulle vi også ønske *gridlines*, skriver vi:

```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])  
draw(c1, axis = [gridlines, location = origin])
```



Vi er næsten tilfredse, men det ville være dejligt, hvis centrum ligeledes blev tegnet med og blev navngivet. Det kan gøres med følgende tilføjelser (læg mærke til syntaksen).

```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])  
draw([c1, C1], axis = [gridlines, location = origin], printtext = true)
```



Det lykkedes, vi fik tegnet en cirkel med *geometripakken*. Lad os se, hvordan vi samtidigt udnytter *geometripakken* til at finde cirkelns areal.

Her er det godt at kunne nogle engelske udtryk; areal = *area*, koordinater = *coordinates*, ligning = *equation*, afstand = *distance*, og radius = *radius*.

Lad os anvende kommandoerne til at finde areal, radius og beregne omkredsen.

$$\text{area}(c1) = \sqrt{16\pi}$$

$$\text{radius}(c1) = 4, \text{ derfor er omkredsen; } 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$$

Ønsker vi resultaterne som kommatall, kan vi approksimere resultatet ved at klikke på *approximate* → 5 (*digits*) i kontekstmenuens højre side.

$$\text{area}(c1) = \sqrt{16\pi} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 50.266$$

$$\text{radius}(c1) = 4, \text{ derfor er omkredsen; } 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 25.132$$

TRÆNING



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spil!

Tegn følgende fem cirkler og deres centrum.

- a Cirkel c1 med centrum = (0, 0) og radius = 3
- b Cirkel c2 med centrum = (1, 3) og radius = 1.5
- c Cirkel c3 med centrum = (-2, -2) og radius = 4
- d Cirkel c4 med centrum = (-1, 1) og radius = 10
- e Cirkel c5 med centrum = (0, 0) og radius = 100

Flere cirkler i samme koordinatsystem

Lad os antage, at vi får den opgave at konstruere to cirkler i samme koordinatsystem.

Om den ene cirkel får vi at vide, at centrum ligger i $(2, 2)$ og har en radius på 4, om den anden cirkel får vi at vide, at den har centrum i $(-2, -2)$ og ligeledes en radius på 4.

Vores opgave er at finde *arealet* af de to cirkler, finde deres *ligning*, finde hvilke *punkter* de to cirkler skærer hinanden, og *afstanden* mellem de to cirklers centrummer?

with(geometry) :

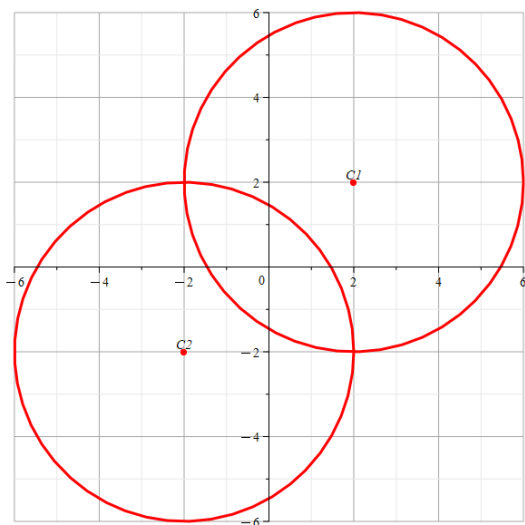
point(C1, [2, 2]) :

circle(c1, [C1, 4]) :

point(C2, [-2, -2]) :

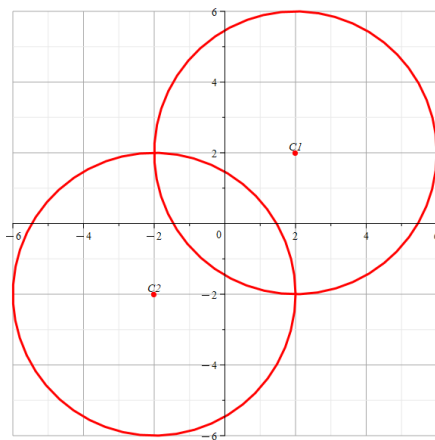
circle(c2, [C2, 4]) :

draw([c1, C1, c2, C2], axis = [gridlines, location = origin], printtext = true)



Som det ses, skal alle de punkter og figurer, vi vil have kommandoen *draw* til at tegne, placeres mellem to kantede parenteser.

Lad os tage hul på resten af opgaverne, og starte med at finde areal af *c1* og *c2*.



$$\text{area}(c1) = 16 \pi$$

$$\text{area}(c2) = 16 \pi$$

Vi fortsætter med at finde de to cirklers ligning:

$$\text{Equation}(c1) = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$$

$$\text{Equation}(c2) = x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

Nu kunne vi indvende, at ligningen til cirklen c1 ikke svarer til den ligning vi fremdrog og anvendte tidligere, nemlig: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

At det er den samme ligning, kan vi udlede af, hvad der sker, hvis vi ganger parenteserne ud:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4^2 \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 2) + (y - 2) \cdot (y - 2) - 16$$

Jeg ganger ind i parenteserne:

$$(x^2 - 2x - 2x + 4) + (y^2 - 2y - 2y + 4) - 16$$

...og får

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 16$$

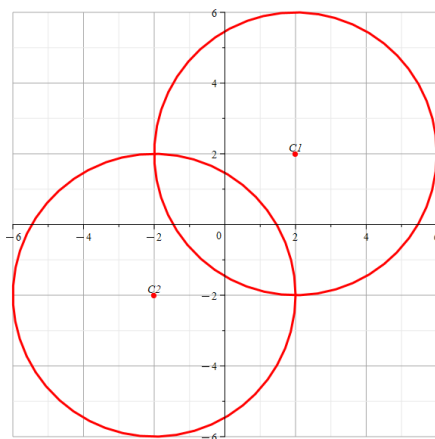
Jeg hæver parenteserne:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 16$$

Reducerer, og får:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8$$

Vi kan hermed konkludere, at $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4^2 = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8$, og at de to udtryk svarer til hinanden.



Lad os fortsætte med at finde de to punkter, hvor de to cirkler skærer hinanden, det gøres ved hjælp af kommandoen *intersection*

Først defineres punktet og gives et navn (*skp*);

intersection(skp, c1, c2) = [c1_intersect1_c2 , c1_intersect2_c2]

Dernæst beder vi om koordinaterne til de to punkter, et ad gangen;

coordinates(c1_intersect1_c2) = [-2, 2]

coordinates(c1_intersect2_c2) = [2, -2]

Nu mangler vi bare at finde afstanden mellem de to punkter, *C1* og *C2*, der udgør vores centrum:

distance(C1, C2) = $\sqrt{32}$

TRÆNING



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spil!

Tegn to cirkler, en cirkel med centrum i $(2, -2)$ og en radius = 6, og en cirkel med centrum i $(-2, -6)$ og en radius = 2.

Find skæringspunktet mellem de to cirkler.

Tegning af en cirkel ud fra cirkelns ligning

Hvis vi kender koordinaterne til cirkelns centrum og dens radius, kan vi udlede cirkelns ligning ud fra formlen;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

...hvor (a, b) er koordinaterne for centrum, og r er radius.

Det kan også være, at vi har fået givet cirkelns ligning.

I vores kendte cirkel med centrum i $(2, 2)$ og med en radius på 4, kan vi, ved at sætte koordinaterne ind i ligningen, deducere os frem til at ligningen der skal tegne cirklen, er:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

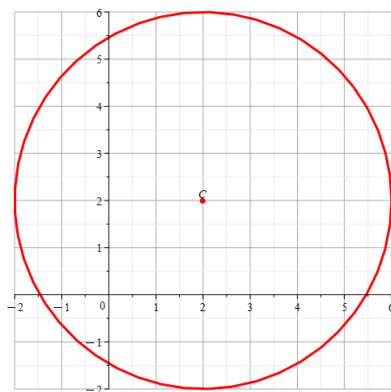
Vi starter med at definere cirklen:

`circle(c3, (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4^2, [x, y]) :`

Når vi definerer en cirkel ud fra dens ligning, skal vi også angive, hvilke variable der indgår - lidt som da vi anvendte *implicitplot*. Det gør vi ved i firkantede parenteser, efter ligningen, at skrive $[x, y]$.

Vi tegner den, lige som før, ved at skrive;

`draw(c3, axis = [gridlines, location = origin])`

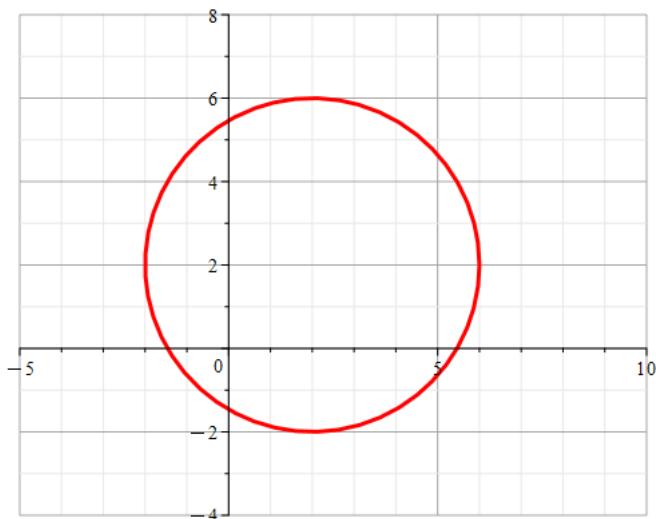


Alle de kommandoer samt centrum kan tilføjes, som netop gennemgået i eksemplet med *tegning af en cirkel ud fra centrum og radius* på de forrige sider.

Det kan tænkes, at vi finder det nødvendigt at udvide vores koordinatsystem, altså selv bestemme grænserne for x- og y-akse.

Dette gøres ved at tilføje kommandoen *view*. Se følgende eksempel:

`draw(c3, axis = [gridlines, location = origin], view = [-5..10, -4..8])`



TRÆNING



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spil!

Ud fra følgende oplysninger, skal du finde hver af cirkelns ligninger, og tegne dem i samme koordinatsystem.

Find afstanden mellem de to centre.

- a Cirkel c_1 med centrum = $(0, 0)$ og radius = 3 og cirkel c_2 med centrum = $(1, 3)$ og radius = 1.5
- b Cirkel c_3 med centrum = $(-2, -2)$ og radius = 4 og cirkel c_4 med centrum = $(-1, 1)$ og radius = 10

Tegn en cirkel ud fra tre punkter.

Vi holder os til den cirkel vi kender, og hvis ligning er $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$, på den måde kan vi se, om vi gør det rigtigt.

Vores cirkel går gennem følgende tre punkter $(-2, 2)$, $(2, -2)$ og $(2, 6)$.

Vi starter med at give hvert af punkterne et navn;

`point(A, -2, 2) :`

`point(B, 2, -2)`

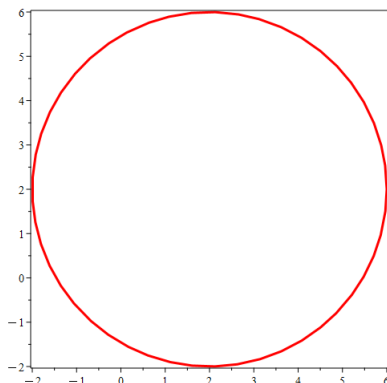
`point(C, 2, 6) :`

...derefter definerer og navngiver vi cirklen `c1`;

`circle(c1, [A, B, C]) :`

og tegner den;

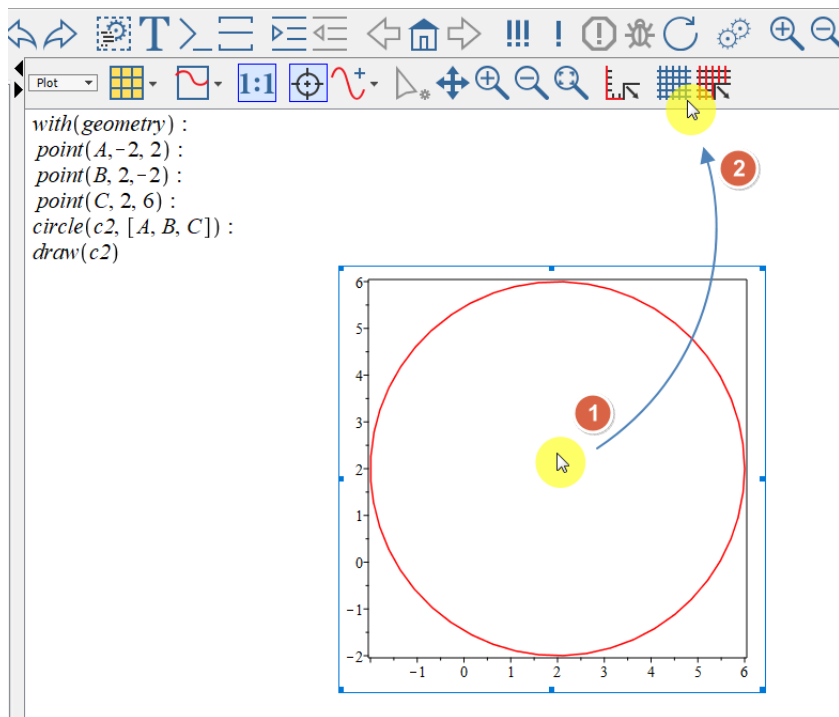
`draw(c1)`



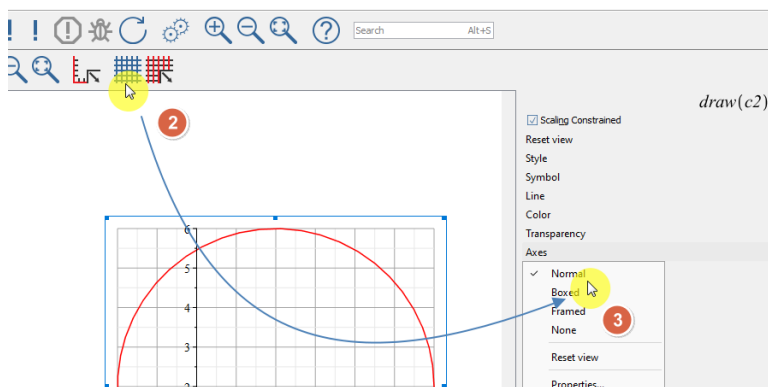
Denne gang, vil vi ikke skrive, at vi ønsker koordinatsystemet centreret, eller at der skal være *gridlines*. Vi vil i stedet benytte os af, at vi med et museklik kan få begge dele fra værktøjslinje og kontekstmenu.

Vi vil også lade som om, at vi *ikke* kender centrum for cirklen, men bede Maple om at finde den.

Vi tilføjer *gridlines* til vores cirkel, ved først at klikke inde i cirklen ①, hvorefter vi klikker vi på *Toggle gridlines* ②.



Som det næste, skal vi have koordinatsystemet centreret. Klik i kontekstmenuen på *axes* til højre og vælg *normal*,



Nu mangler vi bare at finde cirkelns centrum. Først skal vi definere centret, det gøres ved at skrive;

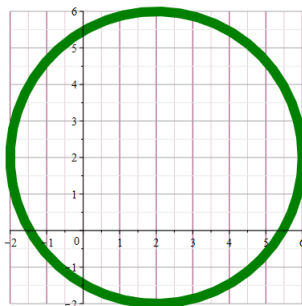
$$\text{center}(C, c1) :$$

Vi fortæller Maple, at C er navnet på centrum til cirklen c1, og kan nu få koordinaterne ved at skrive;

$$\text{coordinates}(C) = [2, 2]$$

Kontekstmenuen giver os mange muligheder, fx kan vi skifte cirkelns farve, ved at klikke på cirklen, vælge menupunktet *Color*, og til sidst vælge en af de tilgængelige farver.

Cirkelperiferiens bredde kan du manipulere med, ved at klikke på *Line* og i bunden af rullemenuen vælge *Line Width*.



Leg lidt selv. Klik på *Change gridlines properties*, for at ændre farven og indstillingerne på nettet, klik fx på *Axes* og giv x- og y-aksen navne, giv dit *cirkeldiagram* et navn...

En lang rejse

Det har været en lang rejse med cirklen, men før vi forlader cirklen helt, skal vi kigge på en sidste opgave.

Lad os gå ud fra, at opgaven hedder, at vi skal dele et runde havebed op i fire lige store bed, et bed med røde blomster, et bed med gule blomster og et bed med henholdsvis blå og grønne blomster.

Blomsterbeddet

Fra før ved vi, at cirklen kan tegnes på flere måder. Vi vil anvende skolepakken *with(skole)* og metoden med *cosinus* samt *sinus* til vores vinkel α .

Idet vi skal lave et rundt bed, vil vi sætte centrum til $(x, y) = (0, 0)$, og i opgaven står, at radius $r = 1.5$.

Vi kan derfor bruge, den for os bekendte metode til at tegne cirkeludsnit;

$$\text{plot}([x + \text{radius} \cdot \text{Cos}(\alpha), y + \text{radius} \cdot \text{Sin}(\alpha), \alpha = 0..360])$$

...hvor α fortæller hvor mange grader cirkeludsnittet udgør. Tilbage står, hvordan vi farver de enkelte cirkeludsnit - også her har Maple en syntaks, der skal følges.

with(skole):

rød := $[(0 + 1.5 \cdot \text{Cos}(\alpha), 0 + 1.5 \cdot \text{Sin}(\alpha), \alpha = 0..90)]$

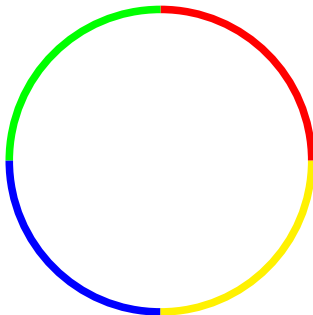
grøn := $[(0 + 1.5 \cdot \text{Cos}(\alpha), 0 + 1.5 \cdot \text{Sin}(\alpha), \alpha = 90..180)]$

blå := $[(0 + 1.5 \cdot \text{Cos}(\alpha), 0 + 1.5 \cdot \text{Sin}(\alpha), \alpha = 180..270)]$

gul := $[(0 + 1.5 \cdot \text{Cos}(\alpha), 0 + 1.5 \cdot \text{Sin}(\alpha), \alpha = 270..360)]$

Alle fire bed er nu defineret. Hvert bed er et cirkeludsnit på 90° , og derfor er alle bed lige store.

Tegner vi nu alle fire cirkeludsnit, får vi en cirkelperiferi i fire farver:

$$\text{plot}([\text{rød}, \text{grøn}, \text{blå}, \text{gul}], \text{color} = [\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{yellow}])$$


Nu mangler vi bare at fylde hver fjerdel med farverne rød, grøn, blå og gul og evt. fjerne x - akse og y - akse.

I Maple gøres dette ved at tilføje `filled = true` og evt. `axes = none`. Farvelægningen af bedet i Maple ser således ud;

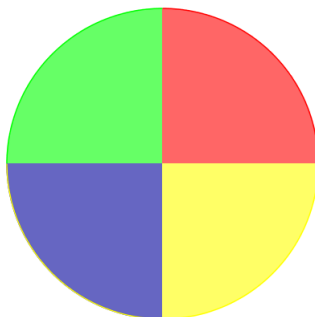
`rød:= ([1.5 · Cos( $\alpha$ ), 1.5 · Sin( $\alpha$ ),  $\alpha$  = 0..90])`

`grøn:= ([1.5 · Cos( $\alpha$ ), 1.5 · Sin( $\alpha$ ),  $\alpha$  = 90..180])`

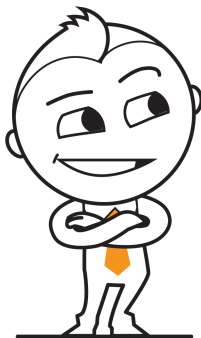
`blå:= ([1.5 · Cos( $\alpha$ ), 1.5 · Sin( $\alpha$ ),  $\alpha$  = 180..270])`

`gul:= ([1.5 · Cos( $\alpha$ ), 1.5 · Sin( $\alpha$ ),  $\alpha$  = 270..360])`

`plot([rød, grøn, blå, gul], color = [red, green, blue, yellow] filled = true, axes = none)`



Der er meget mere vi kunne kaste os over, i forbindelse med cirkler i Maple, men vi forlader cirklen for nu, og kaster os i al hast over trekanter, firkanter og andre polygoner.



Giv dig selv en udfordring, der sætter din viden på spill!

Brug geometri- (*with(geometry)*) til at tegne og finde arealet af følgende seks cirkler;

- 1) En cirkel med centrum $(x, y) = (0, 0)$ og radius $r = 3$
- 2) En cirkel med centrum $(x, y) = (1, 3)$ og radius $r = 2$
- 3) En cirkel med centrum $(x, y) = (-2, 1)$ og radius $r = 1$
- 4) En cirkel med centrum $(x, y) = (4, -2)$ og radius $r = 2,5$
- 5) Tegn to cirkler i samme koordinatsystem, den ene med centrum i $(x, y) = (0, 0)$ og diameter $r = 8$, den anden med centrum i $(5, 2)$ og radius $r = 5$

Lad os udfordre dig lidt mere...

Prøv at udregne omkredsen af dine cirkler i Maple, således at du har både areal og omkreds for de første fire cirkler.

Prøv derefter at udregne arealet og omkredsen på din lommeregner - får du det samme?

Og til sidst, så tegn og finde omkreds og areal, i enten GeoGebra eller Desmos, af de to cirkler i opgave 5 - hvilke forskelle er der i resultatet mellem Maple og et af de to tegneprogrammer? Hvilket et af de to programmer er mest nøjagtigt?

TREKANTEN

En trekant er i geometrisk forstand en polygon med tre vinkler (hjørner) og tre sider.

Trekanter kan inddeles i spids-, ret- og stumpvinklede. I en spidsvinklet trekant er alle tre vinkler *mindre end* 90° . I en retvinklet trekant er den ene vinkel ret, dvs. 90° . I en stumpvinklet trekant er den ene vinkel stump, dvs. større end 90° .

TEGN TREKANTEN

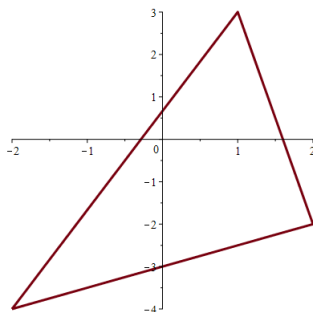
Vi skal tegne en vilkårlig trekant, og skal derfor starte med *begyndelsen*. Vi skal visualisere et koordinatsystem, og forestille os de tre punkter, hvor trekantens hjørner er. Lad os til en start sige, at vores tre hjørner A , B og C befinder sig i punkterne;

$$A(-2, -4), \quad B(2, -2) \quad \text{og} \quad C(1, 3)$$

I maple tegnes trekanten hurtigt, ved at skrive:

$$\text{plot}([[-2, -4], [1, 3], [2, -2], [-2, -4]])$$

Læg mærke til, at vi starter og slutter samme sted, for at slutte trekanten - læg også mærke til *syntaksen*; hvert punkt er skrevet inde i en firkantet parentes, og alle fire punkter er igen omsluttet af en firkantet parentes.



Maples syntaks dikterer, at skal flere ting gøres med samme kommando, skal de ting kommandoen skal udføre, omklamres af firkantede parenteser.

Alle linjer og polygoner kan tegnes på denne måde, ved at bruge kommandoen *plot*.

TRÆNING



Test din viden!

Prøv selv at tegne fem vilkårlige trekanter i Maple. Prøv også på samme måde, at tegne fem vilkårlige kvadrater, og fem vilkårlige rektangler i Maple.

En sidste udfordring; tegn to vilkårlige trekanter i samme koordinatsystem.

EN PÆNERE TREKANT

I den trekant vi tegnede med *plot*, kan det være svært at beregne arealet, fordi vi ikke umiddelbart kan aflæse en højde.

Vi skal derfor igen have fat i *geometripakken*, og denne gang vil vi arbejde med at udfylde vores trekant med en farve.

Vi skriver inden vi starter, derfor:

with(geometry) :

Vi kan nu, på samme måde, som da vi beskæftigede os indgående med cirklen, anvende *geometripakken* til at få Maple til at farve og beregne arealet af vores trekant.

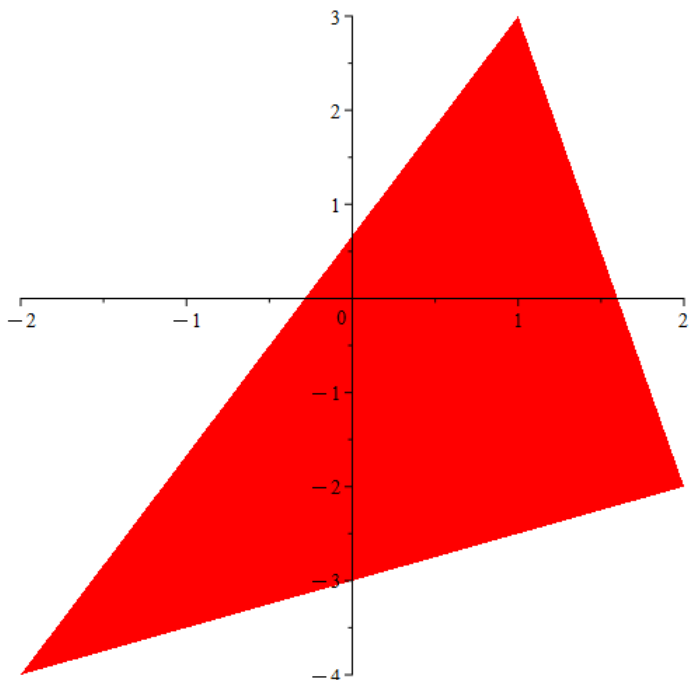
Lad os bruge samme trekant. Vi erindrer at trekanten havde sine hjørner i punkterne; $A(-2, -4)$, $B(2, -2)$ og $C(1, 3)$.

Først definerer vi de tre hjørner i vores trekant:

$point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2)$

Vi fortsætter som før, men fortæller at det drejer som om *polygonet trekant*, og vi ønsker trekanten fyldt ud (grundfarven er rød). Det ser således ud i Maple:

```
with(geometry) :  
point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :  
triangle(t2, [A, B, C]) :  
draw(t2, filled = true)
```



Helt tilfredse er vi ikke, for dels vil vi gerne have *navngivet* hjørnerne A, B og C, og dels vil gerne have, at koordinatsystemet er *centreret*, x- og y-akse har samme inddeling og *gitteret* vises.

Vi tilføjer derfor følgende kommandoer til vores linje;

`axis = [gridlines, location = origin]`, som fortæller Maple, at koordinatsystemet skal vise begge akser og gitter.

`printtext = true`, der navngiver trekantens hjørner, med de af os tildelte navne A, B og C.

`scaling = constrained`, der sikrer at begge akser har samme inddeling.

I Maple ser det således ud:

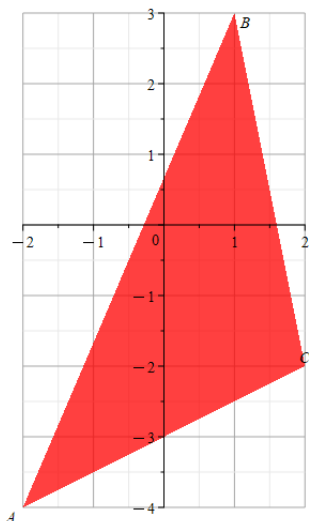
`with(geometry) :`

`point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :`

`triangle(t2, [A, B, C]) :`

`draw(t2, filled = true, axis = [gridlines, location = origin],`

`printtext = true, scaling = constrained)`



Vi ser nu, at vi har med en stump trekant at gøre, idet at *vinkel C* er større end 90° .

Som det næste, skal vi have Maple til at skrive trekantens areal for os. Vi bruger den af os allerede kendte kommando:

`area(t2) = 11`

Med henblik på at finde trekantens omkreds, anvender vi kommandoen *distance* og lægger dem sammen (dicimaltallet i resultatet til sidst, er fremkommet ved at bruge *Approximate* i kontekstmenuen);

$$\text{distance}(A, B) = \sqrt{58}$$

$$\text{distance}(B, C) = \sqrt{26}$$

$$\text{distance}(A, C) = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{58} + \sqrt{26} + 2\sqrt{5} \approx 17.25$$

Vi kunne også vælge at beregne omkredsen. Fordi hver side i trekanten, kan defineres som hypotenusen i en retvinklet trekant, kan vi, ved at bruge vinkelspidsernes koordinater, finde længden af en side ved at bruge formlen:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Altså er linjestykkerne $|AB|$, $|BC|$ og $|CA|$:

$$|AB| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{58}$$

$$|BC| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{26}$$

$$|AC| = \sqrt{(2 - (.2))^2 + (-2 - (-4))^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Omkreds} = \sqrt{58} + \sqrt{26} + 2\sqrt{5} \approx 17,25$$

(Har du svært ved at forstå, hvordan formlen er fremkommet, kan du læse næste side, inden du kaster dig over træningen!)

TRÆNING

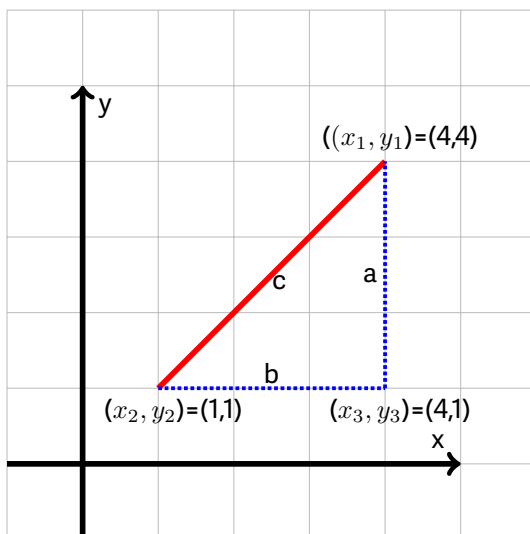
Prøv både at beregne, ved hjælp af formlen, og finde længden, ved hjælp af $\text{distance}(A,B)$ af følgende linjer i et koordinatsystem:

- Fra A(-2,-1) til B(2,2)
- Fra A(-1,-4) til (4,8)
- Fra A(0,0) til B(3,4)

Har du regnet rigtigt, giver alle tre resultater et helt tal!

Pythagoras

Hvis du synes, at formlen $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ikke giver mening, så prøv lige at overvej, hvad formlen har at gøre med *Pythagoras'* læresætning $a^2 + b^2 = c^2$



Længden af siden a , finder vi ved at sige $y_1 - y_3$, altså $4 - 1 = 3$.

Længden af siden b , finder vi ved at sige $x_2 - x_3$, altså $4 - 1 = 3$

Hver af de to sider a og b repræsenterer kateterne i den retvinklede trekant. Ved at sætte x_1 og x_3 , samt y_1 og y_3 ind i læresætningen $a^2 + b^2 = c^2$, får vi;

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = c^2$$

Men, da $x_3 = x_2$ og $y_3 = y_2$, kan vi bytte variablerne ud, og skrive;

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = c$$

...og der er den, formlen for at finde længden af en linje i et koordinatsystem!

Hvis du synes det ligner noget, du allerede har brugt i denne bog, så har du ret - det drejer sig om cirkelns ligning.

TREKANTENS OMSKREVNE CIRKEL

Rundt om enhver trekant kan der tegnes en cirkel, så alle trekantens hjørner ligger på cirkelperiferien. En sådan cirkel kaldes for trekantens omskrevne cirkel.

Konstruktion af den omskrevne cirkel til $\triangle ABC$

Vi vil i det følgende eksempel arbejde med, den af os kendte $\triangle ABC$, hvis tre hjørner er $A(-2, -4)$, $B(1, 3)$ og $C(2, -2)$

Lad os konstruere den omskrevne cirkel i Maple, ud fra hvad vi ved om trekanten, fra de beregninger vi har foretaget os, allerede.

Vi kender;

- koordinaterne til trekantens tre hjørner
- længden af siderne a, b og c
- trekantens areal

Da den omskrevne cirkels tre hjørner alle skal ligge på *cirkelperiferien*, er det den første oplysning vi skal bruge.

Vi ved, at vi kan anvende *geometripakken* til at tegne både en cirkel og en trekant ud fra tre punkter.

Vi skal følge den metode vi allerede kender;

1. Først skal vi definere punkterne A, B og C
2. Når vi har defineret vores punkter, definerer vi, en ad gangen, vores to figurer; *trekant(t1)* og *cirkel(c1)*
3. Dernæst tegnes begge figurer i samme koordinatsystem, ved at sætte de figurer vi ønsker tegnet, mellem to firkantede parenteser i kommandoen *draw()*
4. Til sidst tilføjes yderligere kommandoer, der skal gøre det lettere at aflæse figureernes koordinater, fx *gitter*, farver og centrering af koordinatsystemet.

I Maple ser det således ud;

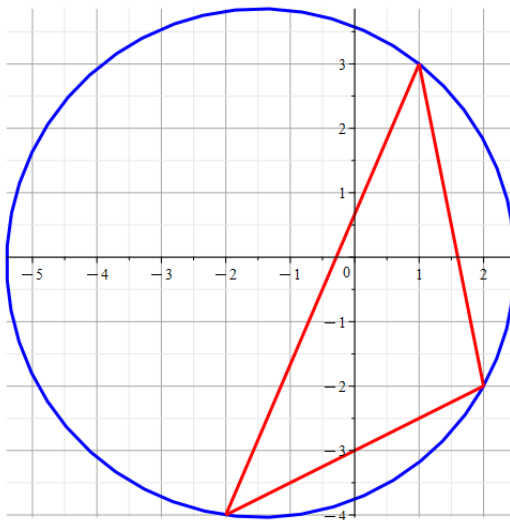
with(geometry) :

point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :

triangle(t1, [A, B, C]) :

circle(c1, [A, B, C])

draw([c1, t1], axis = [gridlines, origin = true], color = [blue, red])



Læg mærke til at farverne står i den rækkefølge, vi ønsker farverne fordelt. Her er cirklen blå og trekanten rød, fordi at *c1* og *blue*, samt *t1* og *red* følges ad i rækkefølgen.

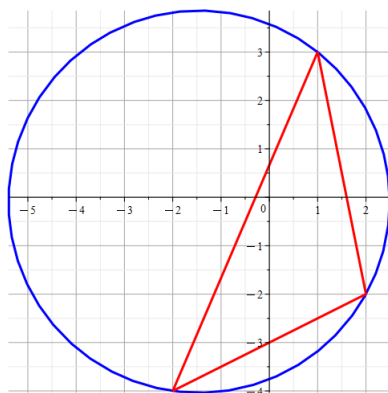
Efter vi har tegnet cirkel og trekant, kan Maple udregne arealet af begge figurer, og finde centrum for cirklen.

Decimaltallene fremtvinges ved at vælge *Approximate* → *antal betydende cifre* i kontekstmenuen.

area(t1) = 11

area(c1) = $\frac{1885\pi}{221}$ at 5 digits → 48.943

coordinates(center(c1)) = $\left[-\frac{16}{11}, -\frac{1}{11}\right]$



Kun omkredsen af trekanten og cirklen er en smule mere besværlig.

Lad os starte med omkredsen af trekanten.

Vi lægger afstanden mellem punkterne A, B og C sammen, ved hjælp af kommandoen *distance*, og afslutter med at finde en cirkaværdi, ved at anvende *Approximate* fra kontekstmenuen.

$$O_t = \text{distance}(A, B) + \text{distance}(B, C) + \text{distance}(C, A) =$$

$$\sqrt{58} + \sqrt{26} + \sqrt{20} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 17.187$$

Skal vi finde omkredsen af cirklen, skal vi først finde cirkelns radius. Det gøres ved at skrive;

$$\text{radius}(c) = \frac{\sqrt{1885}\sqrt{121}}{121} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 3.9470$$

Derefter skal vi sætte resultatet ind i formlen: $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

$$O_c = 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{2\pi\sqrt{1885}\sqrt{121}}{121} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 7.8939 \pi$$

Indrømmet, ikke et kønt resultat, men nøjagtigt!

Prøv evt. kræfter med denne her trekant; A(-4, 0), B(2, 1) og C(-2, -1) - find omkreds og areal af både trekant og cirkel.

VINKLER OG VINKELHALVERING

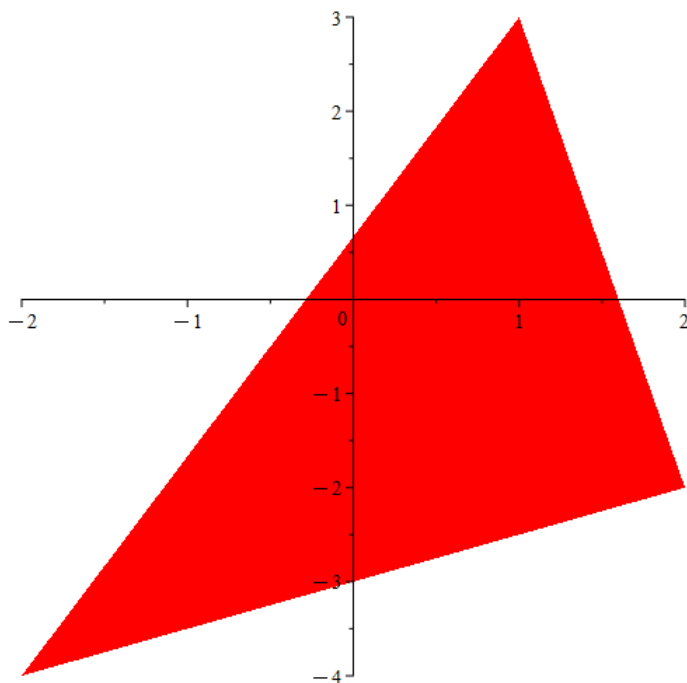
Skolepakken indeholder trekantsværktøjet *trekantsolve*, men kan kun beregne vinkler og sidelængder, ikke tegne dem.

I det følgende vil vi kort gennemgå, hvorledes vi bruger *geometripakken* til at finde en trekants vinkler, og hvordan man tegner vinkelhalveringslinjer.

Find vinklen

Vi har indlæst og tegnet vores trekant, den vi allerede kender.

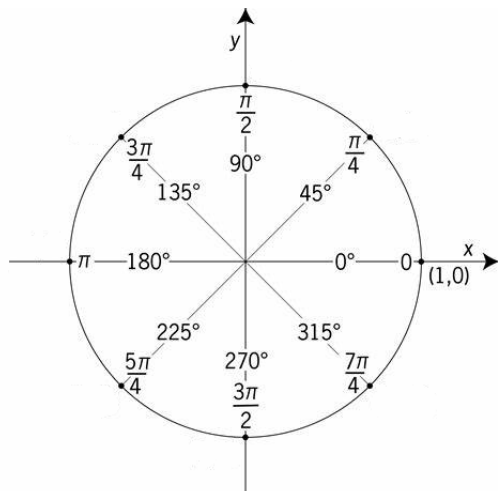
```
with(geometry) :  
point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :  
triangle(t2, [A, B, C]) :  
draw(t2, filled=true)
```



Skal vi finde vinklerne i trekanten, skal vi anvende kommandoen: *FindAngle*

Før vi starter, skal vi gøres os det klart, at Maple ikke regner i *grader*, som vi gør i Danmark, men i stedet anvender *radianer*.

Både grader og radianer er kan anvendes til at måle størrelsen af en vinkel. Grader er baseret på at dele en cirkel i 360° grader, mens radianer er baseret på at dele en cirkel i $2 \cdot \pi$ lige store dele.



Sammenhængen mellem radianer og grader

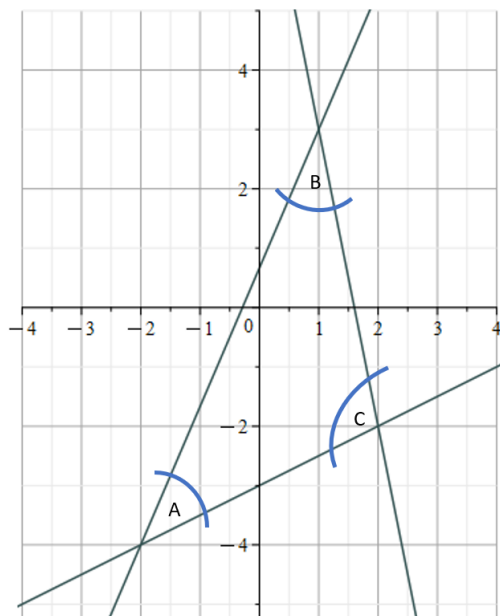
For at omregne fra radianer til grader, skal vi multiplicere radianværdien med $\frac{180^\circ}{\pi}$

F.eks konverteres $\frac{\pi}{4}$ radianer til grader, ved at regne: $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$

Den viden kan vi drage nytte af, når vi skal finde vinklerne i vores trekant (og ikke anvender trekantværktøjet, der gennemgås i næste kapitel).

Lad os til en start finde vinklerne i vores trekant, ved først at definere de tre linjer som trekanten består af, nemlig linje *l1*, som går fra A til B, *l2*, der går fra B til C og linje *l3*, der går fra C til A.

Før at Maple kan tegne vinkelhalveringslinjer, normaler, højder og beregne vinklernes størrelse, skal programmet have defineret, hvilke linjer der skal bruges.



Trelantens vinkler findes

Vi har tre punkter;

$$\text{point}(A, -2, -4), \text{point}(B, 1, 3), \text{point}(C, 2, -2) :$$

og ud fra dem defineres linjerne $l1$, $l2$ og $l3$.

$$\text{line}(l1, [A, B]), \text{line}(l2, [B, C]), \text{line}(l3, [A, C]) ;,$$

Lad os starte med at finde vinkel A, som bestemmes af de to linjer der går gennem $|AB|$ og $|CA|$.

$$\text{FindAngle}(l1, l3) = \arctan\left(\frac{11}{13}\right)$$

Vi ganger med $\frac{1}{2}80$ og deler med Pi (læg mærke til det store 'P' i Pi). Det hjælper os med at forvandle resultatet til et decimaltal sammen med kommandoen `evalf`!

$$\text{evalf}\left(\arctan\left(\frac{11}{13}\right) \cdot \frac{180}{Pi}\right) \approx 40.235$$

Vinkel A er altså $\approx 40.24^\circ$

På samme måde vil vi nu beregne vinkel B :

$$\begin{aligned} \text{FindAngle}(l2, l3) &= \arctan\left(\frac{11}{16}\right) \\ \text{evalf}\left(\arctan\left(\frac{11}{16}\right) \cdot \frac{180}{\text{Pi}}\right) &\approx 34.508 \end{aligned}$$

Vinkel B er altså $\approx 34.51^\circ$

Til sidst den stump vinkel C . Den finder vi hurtigt, fordi vi ved, at i enhver plan trekant giver trekantens vinkler tilsammen 180° ;

$$\angle C \approx 180 - 40.24 - 34.51 = 105.25^\circ$$

Tegning af trekantens vinkelhalveringslinjer

Kommandoen vi leder efter, hedder *bisector* (vinkelhalveringslinje på engelsk), og syntaksen er;

bisector(navn på vinkelhalveringslinjen, Vinkel udspring, trekant)

Lad os finde og tegne vinkelhalveringslinjen, der har sit udspring i punktet $A(-2, -4)$ i trekanten t . Lad os kalde den Va

bisector(Va, A, t) Va

Vi erindrer vores udgangspunkt som var;

```
with(geometry);  
point(A, [-2, -4]), point(B, [1, 3]), point(C, [2, -2]);  
triangle(t, [A, B, C]);
```

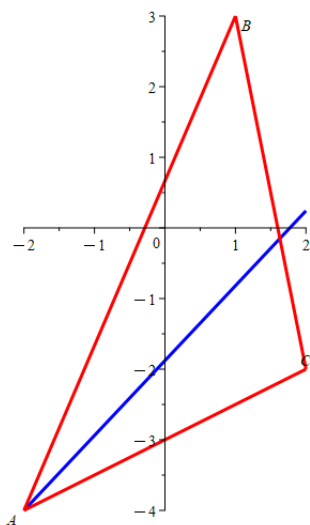
Vi tilføjer to linjer;

```
bisector(Va, A, t);  
draw([t, Va], color = [red, blue], axis = [location = origin]);
```

Vi kunne have nøjes med at skrive; *draw*[t, A], og klaret resten over kontekst-menuen!

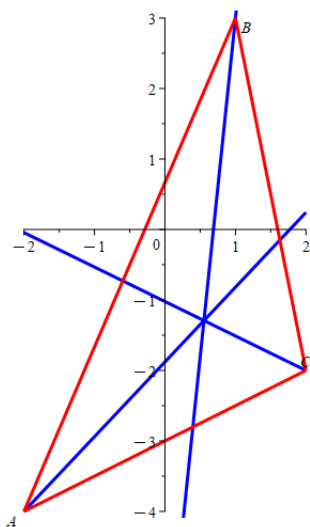
- *Axes* $\rightarrow$ *Normal* (centrer koordinatsystemet)
- *Color* $\rightarrow$ *Blue* (Marker Va og vælg *Blue*)

Lad os se resultatet næste side!



Lad os gøre det færdigt, og få alle vinkelhalveringslinjer med i trekanten:

$bisector(Vb, B, t), bisector(Vc, C, t) :$
 $draw([t, Va, Vb, Vc], color = [red, blue, blue, blue], axis = [location = origin])$



Du har nok lagt mærke til det nu. Alt skal deklareres før det kan blive tegnet eller regnet på. Først skal punkter, linjer og cirkler gives navne og tildeles punkter eller funktioner, før det er muligt at arbejde videre.

Hvis du husker dette, er det hele i virkeligheden ganske simpelt!



Test din viden!

Lad os prøve at sætte alle puskebrikker, af den viden du har opnået, sammen!

I et koordinatsystem er der afsat tre punkter; A(-2,4), B(2,2) og C(-3,-3)

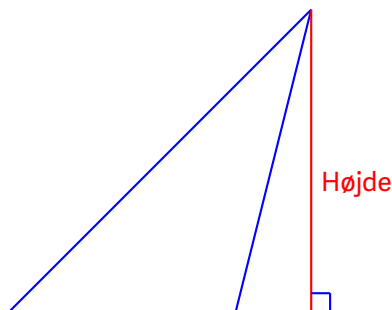
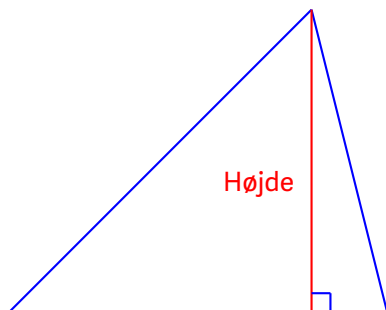
1. Tegn $\triangle ABC$
2. Tegn $\triangle ABC$'s omskrevne cirkel
3. Find længden af alle tre sider i $\triangle ABC$. Hvad hedder trekanten?
4. Bestem alle tre vinkler i trekanten
5. Tegn trekantens vinkelhalveringslinjer
6. Bestem trekantens areal
7. Bestem cirkelns areal og ligning
8. bestem cirkelns omkreds
9. bestem trekantens omkreds

$$\begin{aligned} \triangle \text{ areal} &= 15, \triangle \text{ areal} \approx 43.63, -12 + x^2 + y^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ \triangle \text{ omkr} &= 23.42, \triangle \text{ omkr} \approx 18.61 \\ \triangle \text{ omkr} &= 23.42, \triangle \text{ omkr} \approx 18.61 \end{aligned}$$

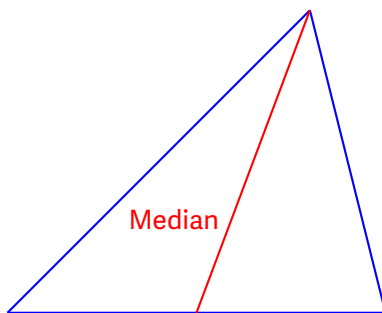
HØJDER OG MEDIANER I EN TREKANT

En højde i en trekant er et **linjestykke**, der går fra en vinkelspids til den modstående side (eller en forlængelse af den modstående side) og står vinkelret på denne.

I enhver trekant er der tre højder - en fra hver vinkelspids. Der er højder der kan tegnes inde i trekanten, som der er højder kan tegnes uden for trekanten.



En median i en trekant er et **linjestykke**, der går fra en vinkelspids i trekanten til midten af den modstående side.



Det kræver lidt af os at tegne *højde* og *median* i Maple - vi bliver nødt til at tænke strategisk.

Vi skal bruge to kommandoer, en for højden (*altitude*) og en for medianen (*median*).

Lige som før, bliver vi nødt til at tænke på, hvad der skal defineres og navngives, før vi kan arbejde med trekanten.

HØJDEN I EN TREKANT

Vi lægger ud med at definere $\triangle ABC$ ud fra tre vinkelspidser, og giver trekanten navnet t .

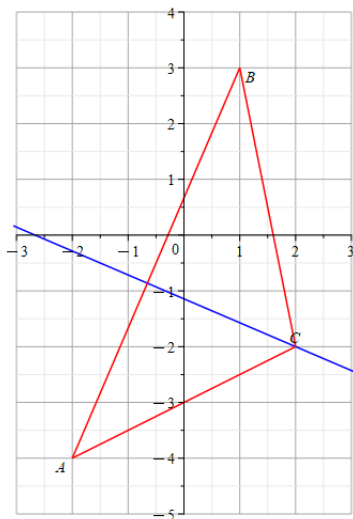
```
with(geometry);  
point(A, [-2, -4]), point(B, [1, 3]), point(C, [2, -2]) :  
triangle(t, [A, B, C]) :
```

Vi fortsætter med at definere den højde der udgår fra $C(2,-2)$ og står vinkelret på $|AB|$.

$altitude(h, t, C)$ - højden navngives h i trekanten t fra punktet B .

Lad os tegne trekant og højde:

```
draw([t, h(color = blue)], axis = [location = origin, gridlines])
```



Linjen går gennem C og står vinkelret på $|AB|$, vi har tegnet en højde, men mangler at finde *afstanden* mellem punktet C og punktet hvor *højden* skær *grundlinjen* (også kaldet *fodpunktet*).

For at finde længden af højden, skal vi først definere $|AB|$:

```
line(l, [A, B]) :
```

Længden af højden finder vi ved at skrive:

$$\text{distance}(l, C) = \frac{11\sqrt{58}}{29} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2.8887$$

Højden der går fra punktet C er altså ≈ 2.89 - ret beset, så behøves vi **ikke** at tegne højden for at Maple finder længden af højden.

Vi kan nøjes med at definere den af trekantens tre linjer, hvor højden har sit fodpunkt, og med kommandoen *distance*(linje,punkt) finde længden af højden.

Træning



En hurtig lille øvelse, både tegn og find de to resterende højder - måske højden fra A og B vil overraske dig?

Følg opskriften; definer først højden og giv den et navn (*altitude*), tegn den ved hjælp af *draw*.

Definer linjen højden skal stå vinkelret på (*line*) og find til sidst længden af højden med *distance*.

Her er to nemme trekanter at afprøve kommandoerne på. $\triangle ABC$, hvor $A(0,0)$, $B(4,0)$ og $C(3,3)$. $\triangle DEF$, hvor $D(6,0)$, $E(10,0)$ og $F(12,4)$.

- Tegn de to trekanter.
- Tegn højden fra henholdsvis punktet C og punktet F
- Find længden af højderne fra C og F
- Find $\angle C$ og $\angle F$

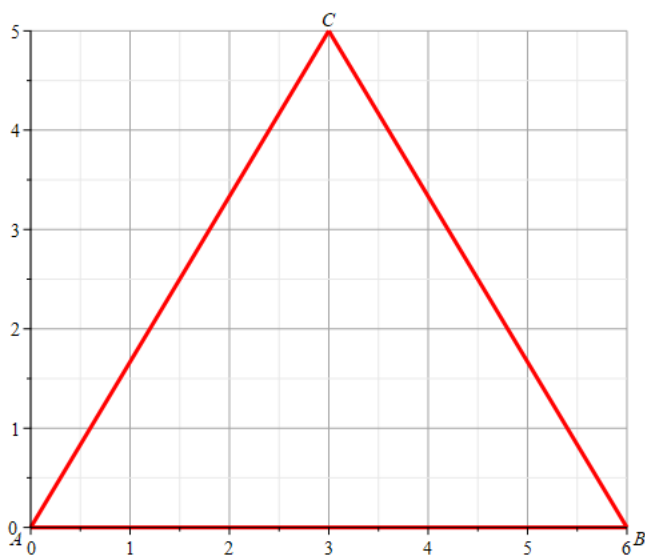
$$\triangle ABC, \text{ højde fra B } \approx 4.92, \text{ højde fra A } \approx 4.31 \\ \triangle ABC, \text{ højde } = 3, \angle C \approx 63.43^\circ, \triangle DEF, \text{ højde } = 4, \angle F \approx 29.74^\circ$$

Medianer

På samme måde, som da vi tegnede højden i trekanten, behandler vi *medianen*; først defineres den, siden tegnes den.

Vi har en $\triangle ABC$, hvor $A(0,0)$, $B(6,0)$ og $C(3,5)$.

```
with(geometry);  
point(A, [0, 0]), point(B, [6, 0]), point(C, [3, 5]);  
triangle(t, [A, B, C]);  
draw(ABC, axis = [location = origin, gridlines], printtext = true);
```



Vi vil nu tegne *medianen* der går fra punktet B og rammer linjestykket $|AC|$.

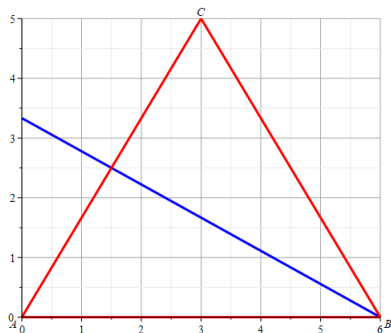
Først definere vi medianen.

Syntaksen er `median(navn, navn på trekant, udgangspunktpunkt)`

```
median(m, ABC, B)
```

Vil vi tegne medianen, tilføjer vi den til vores *draw*-kommando.

```
with(geometry);  
point(A, [0, 0]), point(B, [6, 0]), point(C, [3, 5]);  
triangle(t, [A, B, C]);  
median(m, ABC, B) :  
draw([ABC, m], axis = [location = origin, gridlines],  
printtext = true);
```



Til at finde koordinaterne til, hvor medianen skær linjestykket $|AC|$, anvender vi først kommandoen *midpoint* til at finde midten af linjestykket, og bagefter kommandoen *coordinates* til at finde koordinaterne for midtpunktet.

```
midpoint(mp, A, C) : 0  
coordinates(mp) =  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 
```

TRÆNING



En hurtig lille øvelse, tegn de to sidste medianer i trekanten.

TREKANTENSVÆRKTØJET TREKANTSOLVE

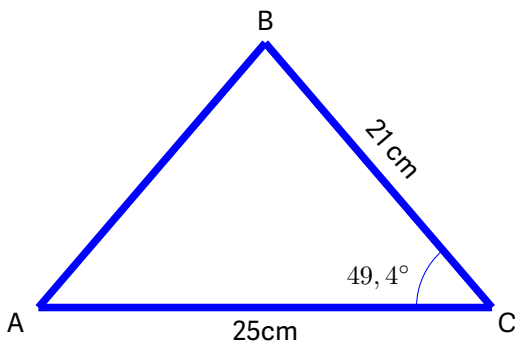


Selvfølgelig indeholder skolepakken et værktøj til trekantsberegninger, der gør det let, ud fra tre oplysninger om trekanten, at finde sider og vinkler.

Vi har *glemt værktøjet med vilje*, for vi ville have, at du vidste, hvad du gjorde, før du brugte et værktøj, hvor du ikke behøves at tænke.

Som eksempel på, hvordan værktøjet virker, vil tage fat på en typisk opgave, som den kan forekomme i et opgavesæt til afgangseksamen.

Vi har en skitse af en trekant med følgende oplysninger:



Til trekanten er der knyttet tre opgaver;

- (a) Bestem længden $|AB|$
- (b) Bestem arealet af $\triangle ABC$
- (c) Bestem vinkel B

trekantsolve er en del af skolepakken, og det er derfor vigtigt, at du har skrevet *with(skole)* : før du starter.

Syntaksen er;

trekantsolve(*var1* = *v1*, *var2* = *v2*, *var3* = *v3*)

var står for længden på en side, og *v* for en vinkel.

Lad os prøve med vores trekant.

with(*skole*) :

trekantsolve(*C* = 49.4, *b* = 25, *a* = 21)

A = 54.59418723, *B* = 76.00581274, *c* = 19.56238922

Vi kan af resultatet læse, at vinkel *A* $\approx 54,6^\circ$, vinkel *B* $\approx 76^\circ$ og at *c* $\approx 19,56$ cm. (idet $|AB| = c$)

Da vi nu kender længden af alle tre sider, kan vi anvende *Hérons formel* til at udregne arealet af trekanten.

$$\text{Hérons formel: } A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Lad os først udregne *s*, og siden sætte siderne og *s* ind i formlen:

$$s = \frac{25 + 21 + 19.6}{2} = 32.8$$

Arealet bliver da:

$$\sqrt{32.8(32.8 - 21)(32.8 - 25)(32.8 - 19.6)} \approx 199.62$$

Vi ved nu, at trekantens areal er ca. 199.62 cm^2

Læg mærke til, at vi, modsat de resultater du vil opnå i Maple, har valgt at afkorte resultaterne til to decimaler. Det gør unøjagtigheden større, så vi anbefaler normalt, at du, hvis du bruger resultatet i yderligere beregninger, tager alle de decimaler med, som Maple anvender i sine beregninger.

I afleveringstilfælde, er det som regel rigeligt med to decimaler.



Trekantsværktøjet *trekantsolve* er en hurtig måde, at komme til resultater, når det drejer sig at udlede sider og vinkler i en trekant, helt uden anvendelse af trigonometri eller Pythagoras.

Men, man lærer ikke geometri ved at anvende værktøjet - man lærer at bruge værktøjet, intet andet.

Prøv i de følgende fem opgaver, at tegne de fem trekanter i opgaverne herunder. Brug evt. *plot* (se under afsnittet TEGN TREKANTEN, hvis du ikke kan huske hvordan), eller kommandoen *triangle* som vi netop har gennemgået. Brug *trekantsolve* sammen med Herons formel, til at udregne arealet af følgende fem trekanter.

1. $A = (-4, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 4)$
2. $A = (1, -2)$, $B = (7, 2)$, $C = (1, 0)$
3. $A = (1, 0)$, $B = (7, 0)$, $C = (7, 5)$
4. $A = (4, 1)$, $B = (7, 1)$, $C = (7, -7)$
5. $A = (-3, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (3, 3)$

Alle fem trekanter er retvinklede, og du bør derfor, når du har tegnet dem, både kunne aflæse længden af de to kateter og samtidigt nemt finde arealet - det er så du kan se, om du har brugt formel og værktøj korrekt.

Hvis du har anvendt *triangle* sammen med *geometripakken*, kan du i stedet bruge kommandoen *area*, til at se om du har regnet rigtigt.

REKTANGELET

Et rektangel er en figur med fire sider, karakteriseret ved, at de 4 hjørner alle er vinkelrette (90°), og at de modstående sider er parallelle og parvis lige lange.

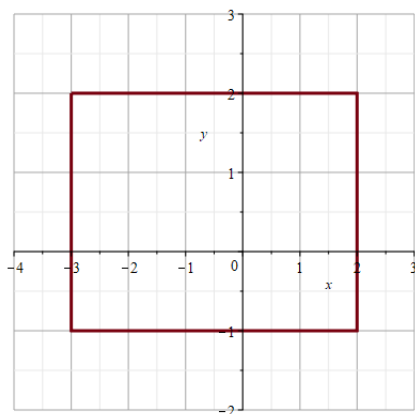
TEGN REKTANGLET

Vi skal tegne en vilkårlig rektangel, og skal derfor starte med *begyndelsen*. Vi skal visualisere et koordinatsystem, og forestille os de fire punkter, hvor rektanglets hjørner er. Lad os til en start sige, at vores fire hjørner A , B , C og D befinder sig i punkterne;

$$A(-3, 2), \quad B(2, 2), \quad C(2, -1) \quad \text{og} \quad D(-3, -1)$$

I maple tegnes rektangle hurtigt, ved at skrive:

`plot([[[-3, 2], [2, 2], [2, -1], [-3, -1], [-3, 2]], x = -4..3, y = -2..3])`

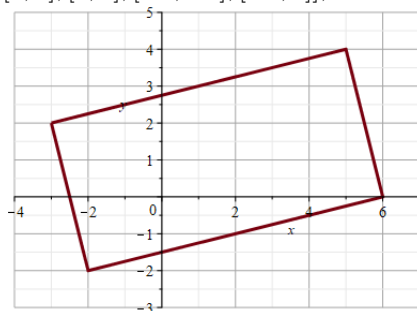


Læg mærke til, at vi starter og slutter samme sted, for at afslutte rektangle - læg også mærke til *syntaksen*; hvert punkt er skrevet inde i en firkantet parentes, og alle fem punkter er igen omsluttet af en firkantet parentes.

Arealet er lige så nemt at regne ud; $3 \cdot 5 = 15!$

Lidt sværere forholder det sig, hvis rektanglet ligger skævt i koordinatsystemet, og man ikke kender længden af siderne.

$\text{plot}([[-3, 2], [5, 4], [6, 0], [-2, -2], [-3, 2]], x = -4..7, y = -3..5)$



(Husk at afkrydse Scaling Constrained)

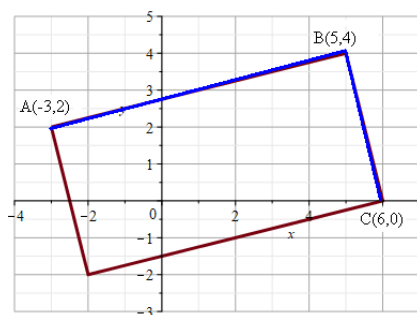
For at udregne arealet af rektanglet, har vi behov for at udregne længderne af to sider vinkelret på hinanden.

Vi regner selv

Vi bruger formelen for afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem (se kapitlet om trekanter - Pythagoras)

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Vi skal bruge længden på to af siderne, for at udregne rektanglets areal. Vi udregner først en af de korte sider, og derefter en af de lange sider (de to blå sider i rektanglet).



Den korte sides længde:

$$\sqrt{(5-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$$

Den lange sides længde:

$$\sqrt{(-3-5)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{17}$$

Arealet finder vi ved at gange de to sider sammen, altså:

$$(2 \cdot \sqrt{17}) \cdot \sqrt{17} = 34$$

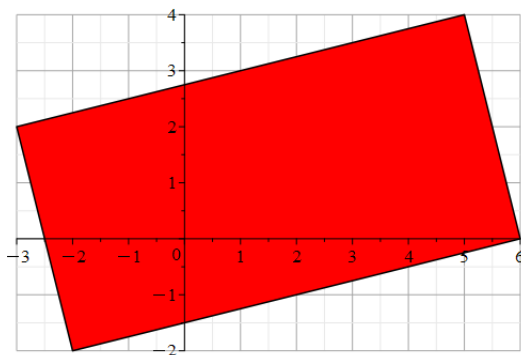
Plots med `polygonplot`

Vi kan også vælge at tegne rektanglet som polygon med `polygonplot`:

`with(geometry)` :

`with(plots)` :

`polygonplot([[−3, 2], [5, 4], [6, 0], [−2, −2]], color = red)`



(Husk at afkrydse `Scaling Constrained`)

Arealet skal udregnes på samme måde som før.

REGULÆRT POLYGON

En polygon kaldes regulær, når alle dens sider har samme længde, og alle dens vinkler er ens.

Vinkelsummen i en polygon er $(n - 2) \cdot 180$, hvor n er antallet af kanter i det regulære polygon.

De regulære polygoner har forskellige navne. De mest almindelige er;

Antal kanter	Navn	Vinkelsum
3	Trigon	180°
4	Tetragon*	360°
5	Pentagon	540°
6	Heksagon	720°
7	Heptagon	900°
8	Oktagon	1080°

*Tetragon genkender vi også som et kvadrat.

TEGN ET REGULÆRT POLYGON

I Maple tegnes den regulære polygon, med kommandoen *RegularPolygon*. Syntaksen er;

RegularPolygon(gon, antal kanter, centrum, radius)

gon er navnet på dit polygon (du vælger selv)

antal kanter, er hvor mange kanter dit polygon har

centrum, er centrum for dit polygon, f.eks. (0,0)

radius er radius for den omskrevne cirkel

Som du ser, heller ikke her kommer vi uden om at skulle forstille os et koordinatsystem, for at kunne placere vores regulære polygoner.

Vi er tilbage ved begyndelsen...

TEGN EN TETRAGON (REGULÆRT KVADRAT)

Lad os antage, at vi skal tegne et *tetragon* med sidelængden 2, og derefter finde *arealet*.

Vi starter med at hente *geometripakken*.

with(geometry) :

Derefter skal vi have navngivet og defineret vores *tetragon* (kvadrat). Vi beslutter os for;

At *tgon* skal være navnet på vores *polygon*

antal kanter = 4 (det er jo et *tetragon*!)

At *centrum* = (0, 0)

At *radius* = $\sqrt{2}$ (den halve *diagonal* i kvadratet)

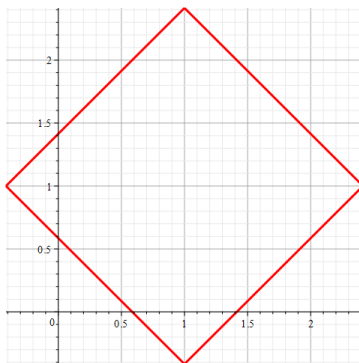
Vi sætter værdierne ind i kommandoen;

RegularPolygon(tgon, 4, point(o, 0, 0), sqrt(2))

(Vi kunne også have defineret centrum for sig selv (*point(o, 0, 0)*), og have nøjedes med at skrive *o*, som navnet for *centrum*.)

Vi er nu parat til at tegne og finde arealet på vores *tetragon*.

draw(tgon, axis = [location = origon, gridlines])



area(tgon) = 4

Vi tegnede altså vores *tetragon* og fandt arealet med fire linjers kode;

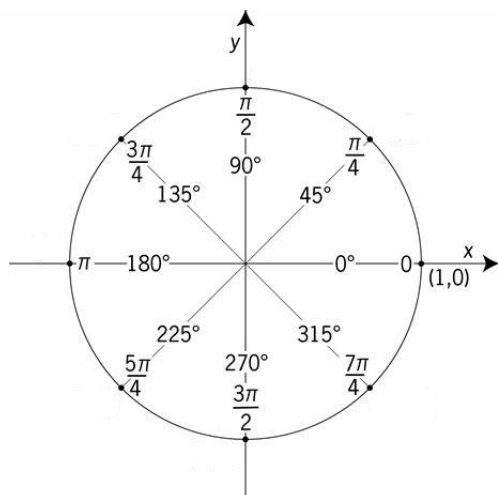
with(geometry) :

RegularPolygon(tgon, 4, point(o, 0, 0), sqrt(2))

draw(tgon, axis = [location = origin, gridlines])

area(tgon) = 4

Mange ville mene, at kvadratet er 'drejet' forkert, så det ligner en rombe. Vi kan skabe et mere 'almindeligt' kvadrat, ved at dreje den 45° . Vores problem er bare, at Maple ikke anvender grader, men radianer.



Sammenhængen mellem radianer og grader

Skal vi oversætte 45° til radianer, skal vi oversætte de 45° til radianer, det gør vi ved at gange med π og dele med 180.

$$\frac{45 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ (se i øvrigt figuren ovenfor)}$$

Kommandoen vi skal anvende er *rotation* (rotation), og syntaksen er;

rotation(navn, objekt, grader, med eller mod uret)

Når vi skal bestemme os for *med-* eller *mod uret*, skal vi bruge de engelske udtryk *clockwise* eller *counterclockwise*.

Lad os se, hvordan det ser ud, når vi sætter det hele sammen. Vores mål; at tegne en 'normal tetragon' (et 'normalt kvadrat').

with(geometry) :

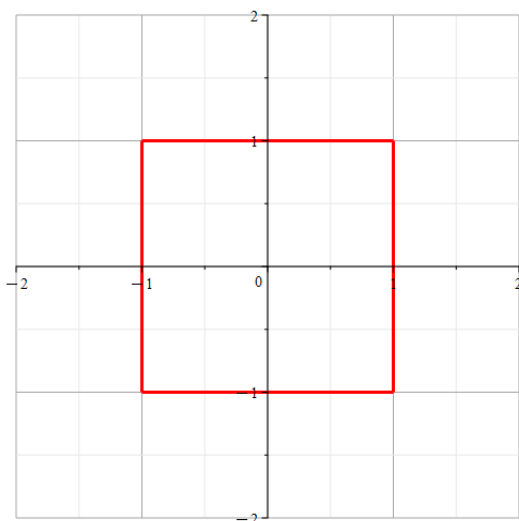
RegularPolygon(tgon, 4, point(o, 0, 0), sqrt(2)) :

rotation $\left(rgon, tgon, \frac{Pi}{4}, clockwise \right) :$

draw(rgon, axis = [location = origon, gridlines])

Husk at skrive Pi med stort P , ellers vil Maple ikke regne med udtrykket!

Vi roterer $tgon$ 45° og navngiver rotationen $rgon$. Vi slutter af med, at bede Maple tegne det roterede kvadrat.



Radius af den omskrevne cirkel i et kvadrat

Radius af den omskrevne cirkel til et kvadrat, vil altid være den halve diagonal af kvadratet.

Til vores første kvadrat med siderne 2, bruger vi Pythagoras' læresætning $a^2 + b^2 = c^2$ til at finde kvadratets diagonal. Derefter deles diagonalen med to, for at finde cirkelns radius.

$$2^2 + 2^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt{8} = c$$

Den halve diagonal bliver da:

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2} = \sqrt{2}$$

Lad os antage, at vi skal tegne et kvadrat med siderne 3. For at dette kan lade sig gøre, skal vi først have udregne den halve diagonal af kvadratet.

$$3^2 + 3^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt{18} = c$$

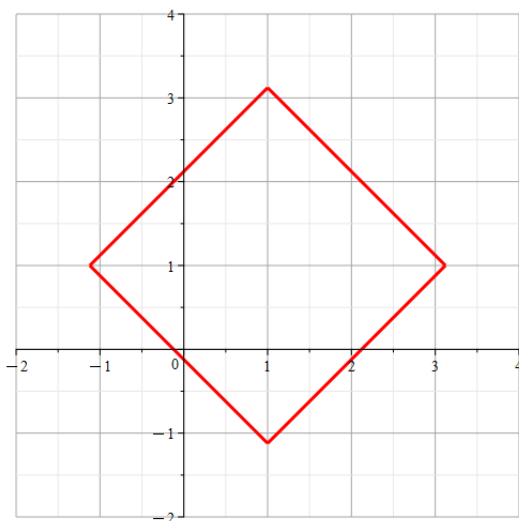
$$\frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

(Alternativt, kan vi også bare bede Maple om at udregne den halve diagonal.)
Med den halve diagonal udregnet, kan vi nu tegne kvadratet (en tetragon) med siderne 3.

with(geometry) :

RegularPolygon $\left(\text{tgon}, 4, \text{point}(o, 1, 1), \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \right) :$

draw(tgon, axis = [location = origin, gridlines])



Arealet finder vi som altid, ved at skrive; $\text{area}(\text{tgon}) = 9$.

Ønsker vi at rotere dette tetragon omkring centrum, som vi her har sat til $o(1, 1)$, kan vi tilføje dette ved at skrive således;

rotation $\left(\text{rgon}, \text{tgon}, \frac{\text{Pi}}{4}, \text{clockwise}, \bullet \right) :$

- idet vi allerede definerede centrum ($point(o, [1, 1])$), da vi definerede vores polygon!

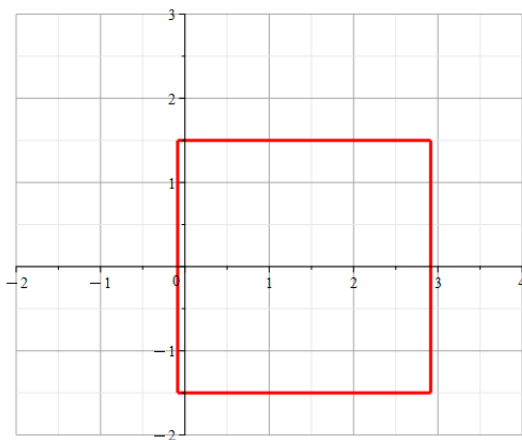
Det ser således ud:

with(geometry) :

$RegularPolygon \left(tgon, 4, point(o, 1, 1), \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \right) :$

$rotation \left(rgon, tgon, \frac{\pi}{4}, clockwise, o \right) :$

$draw(rgon, axis = [location = origon, gridlines])$



Lad os se, hvad Maple kan fortælle om vores oprindelige tetragon $tgon$?
Vi får alle vores oplysninger ved at skrive:

detail(tgon)

name of the object

form of the object

the side of the polygon

the center of the polygon

the radius of the circum – circle

the radius of the in – circle

tgon

RegularPolygon2d

3

[1, 1]

$\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$

$\frac{3}{2}$

(indskrevne cirkel)

the interior angle	$\frac{\pi}{2}$	(= 90°)
the exterior angle	$\frac{\pi}{2}$	
the perimeter	12	(omkreds)
the area	9	
the vertices of the polygon	(vinkelspids – koordinater)	
	$\left[\left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 \right], \left[1, 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right], \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 \right], \left[1, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right] \right]$	

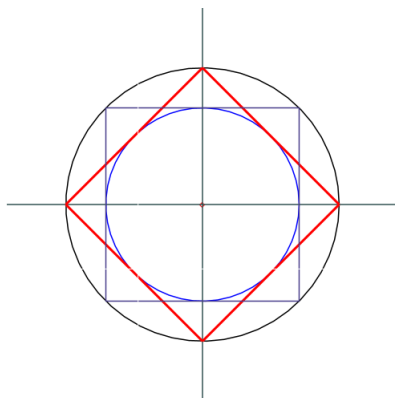
Vi ser altså, at ved at bede om figurens *detaljer*, hvilket vi kan gøre til alle vores figurer vi tegner med *geometripakken*, får vi en masse viden foræret, såsom radius for den omskrevne- og indskrevne cirkel, areal og omkreds m.m.

ØVELSE

Det må være på tide med en lille øvelse, hvor du sætter alt det du har lært på spil.

- Tegn et kvadrat med siderne 4 og har centrum i $o(5, 5)$.
- Drej kvadratet 90°.
- Tegn den indskrevne og omskrevne cirkel.
- Tegn kvadratets to diagonaler

Farver er valgfri, men du skal få et resultat, der ligner følgende figur:



ANDRE REGULÆRE POLYGONER

På samme (nemme) måde tegnes andre regulære polygoner.

En regulær trekant (*trigon*), defineres ved;

RegularPolygon(tgon, 3, point(o, [0, 0]), n) : hvor *n* er radius for den omskrevne cirkel.

Et *pentagon* (*femkant*), defineres ved;

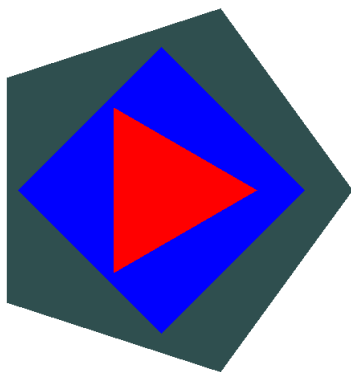
RegularPolygon(tgon, 5, point(o, [0, 0]), n) : hvor *n* er radius for den omskrevne cirkel.

Et *heksagon* (regulær *sekskant*) defineres ved;

RegularPolygon(tgon, 5, point(o, [0, 0]), n : ...OSV.

Lad os lege lidt!

```
draw([tgon(color = red, filled = true), tgon(color = blue, filled = true),  
pgon(color = "DarkSlateGray", filled = true)])
```

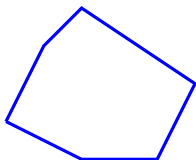


Leg selv lidt videre med farver og former. Tegn et heksagon, et heptagon og et oktagon og fyld de regulære polygoner med farve.

Vil du se hvilke farver, der står til din rådighed, skal du klikke på *Help* → *Maple Help* (eller taste *F1*), og søge på *colors*.

IRREGULÆRT POLYGON

Vi har været gennem meget os to, men lad os slutte af med de *irregulære polygoner*. Et *irregulært polygon* er et polygon, hvor siderne eller vinklerne er forskellige.



irregulært polygon

Her er *geomtripakken* ikke til megen hjælp, og vi må tilføje pakken *plots* til at hjælpe os.

Vi skal altså, når vi arbejder med irregulære (uregulære) polygoner i Maple starte således;

```
with(geometry) :  
with(plots) :
```

Vi kan også vælge at hente begge pakker i samme linje, således;

```
with(geometry) : with(plots) :
```

Vi har allerede tegnet og regnet på et rektangel, og fundet ud af, at der var to metoder til at få tegnet vores rektangel;

1. vha. *plot*-kommandoen
2. vha. *plots*-kommandoen

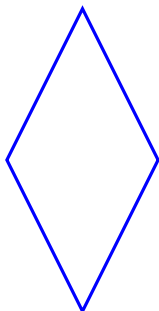
Selv om kommandoerne ligner hinanden, benytter vi os af den første kommando (*plot*), til at tegne et 'tomt' polygon, og den anden kommando (*plots*), til at tegne et 'farvet' polygon.

Da vi allerede har behandlet rektanglet, vil vi slutte af med at tegne og regne på *romben*, *trapezen* og *parallelogrammet*.

ROMBE

En *rombe* (eller rhombe) er et *parallelogram*, hvor alle fire sider har samme længde. Det gælder, at to modstående sider er parallelle. De modstående vinkler er lige store og diagonalerne er vinkelrette i forhold til hinanden.

Nogle kalder den også for en '*salmiak*' eller '*diamant*'.



rombe / rhombe

Vi skal helt tilbage, hvor vi startede - papir og blyant, samt den gode forestillingsevne, når vi skal tegne en *rombe*.

Lad os antage, at vi skal tegne diagonalerne til, og finde arealet af den rombe, hvis '*hjørner*', ligger i punkterne $A(0, -2)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 2)$ og $D(1, 0)$

Da vi arbejder med irregulære polygoner, skal vi hente *geomtripakken* til at begynde med;

with(geometry) :

Derefter skal vi have defineret vores fire punkter, ikke til at tegne med, men til at regne med.

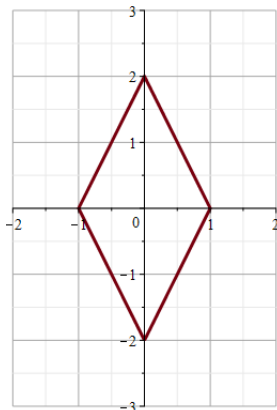
$point(A, [0, -2]), point(B, [-1, 0]), point(C, [0, 2]), point(D, [1, 0])$

Til sidst bruger vi *plot* til at tegne vores *rombe*. Vi skal huske at ende i samme punkt vi startede.

$plots([[0, -2], [-1, 0], [0, 2], [1, 0], [0, -2]])$

Det giver følgende resultat:

```
with(geometry) :  
point(A, [0, -2]), point(B, [-1, 0]), point(C, [0, 2]), point(D, [1, 0])  
plots([ [0, -2], [-1, 0], [0, 2], [1, 0], [0, -2] ], scaling = constrained  
gridlines, view[-2..2, -3..3])
```



Vi vælger at skrive *gridlines* og *scaling=constrained* som en del af vores kommando. Vi, og du, kunne også have valgt at klikke på *værktøjslinjen* og i *kontekstmenuen*.

Lad os regne lidt på *romben*

Kender vi en side (*l*), kender vi omkredsen som er $4 \cdot l$.

Længden på en side, finder vi med kommandoen *distance*. Vi bruger afstanden mellem punktet A og punktet B som en side;

$$4 \cdot \text{distance}(A, B) = 4 \cdot \sqrt{5} \approx 8.9444$$

Arealet af en rombe er: $\frac{h \cdot b}{2}$. Vi kan sagtens aflæse højde og bredde, men vi vil alligevel, foreksemplets skyld, bede Maple om at finde de to værdier.

Højden: $\text{distance}(A, C) = \sqrt{16}$

bredden: $\text{distance}(B, D) = \sqrt{4}$

$$\diamond \text{ Areal: } \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{4}}{2} = 4$$

TRAPEZ OG PARALLELOGRAM

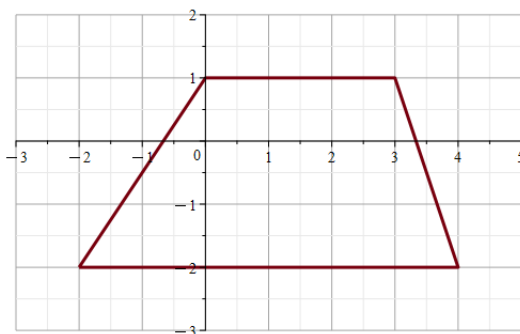
Som det sidste, behandler vi trapezen, ganske kort, fordi fremgangsmåden er den samme, som da vi arbejdede med *romben*.

I geometri er et trapez en firkant med fire sider. Det eneste krav for at kalde en firkant et trapez er at mindst to af siderne er parallelle. Hvis de to andre sider også er parallelle, er dette trapez samtidig et parallelogram.

with(geometry) :

point(A, [-2, -2]), point(B, [4, -2]), point(C, [3, 1]), point(D, [0, 1])

plot([-2, -2], [4, -2], [3, 1], [0, 1], [-2, -2], gridlines, view = [-3..5, -3..2])



Man finder arealet af en trapez ved at sige;

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$

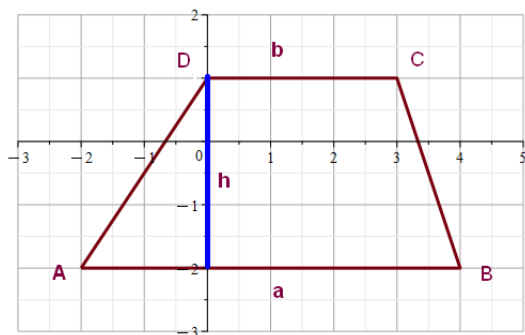
Vi har derfor brug for at finde højden, afstanden fra $A(-2, -2)$ til $B(4, -2)$, samt afstanden mellem punkterne $C(3, 1)$ og $D(0, 1)$. Den første afstand fra A til B kalder vi a , og den anden, fra C til D , kalder vi b .

$$\text{distance}(A, B) = \sqrt{36}$$

$$\text{distance}(C, D) = \sqrt{9}$$

Vi har også behov for at definere linjen a , for at kunne finde højden fra punktet C eller D .

line(a, [A, B]) :



Højden fra punktet D på linjen a finder vi ved at skrive;

$$\text{distance}(D, a) = 3$$

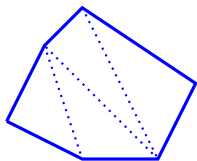
Vi har nu alle de informationer vi skal bruge til at beregne trapezens areal;

$$\square \text{ Areal} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (\sqrt{36} + \sqrt{9}) = \frac{27}{2}$$

Omkredsen finder vi ved at skrive;

$$\text{distance}(A, B) + \text{distance}(B, C) + \text{distance}(C, D) + \text{distance}(D, A) = \sqrt{36} + \sqrt{10} + \sqrt{9} + \sqrt{13} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 15.768$$

Da alle irregulære polygoner kan behandles på samme måde, forlader vi emnet her.



Lige en sidste bemærkning! Nogle irregulære polygoner, som dette til venstre, har ikke en formel til at beregne arealet med.

I de tilfælde må vi inddеле figuren i trekanter (se kapitlet om trekanter) og beregne arealet af hver trekant.

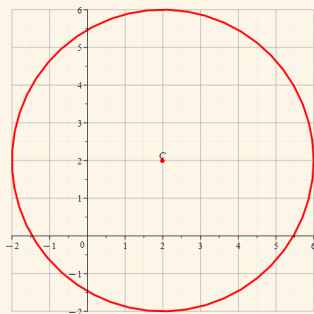
Ved at lægge arealerne sammen af hver trekant, findes det samlede areal af polygonet.

Det var det! Vores fælles rejse slutter her. Vi håber du lærte noget, og at du har lyst til at undersøge de mange andre muligheder Maple tilbyder.

På de efterfølgende sider finder du korte 'snippets' der opsummerer, hvad vi har gennemgået. Tak fordi du fulgte os hele vejen.

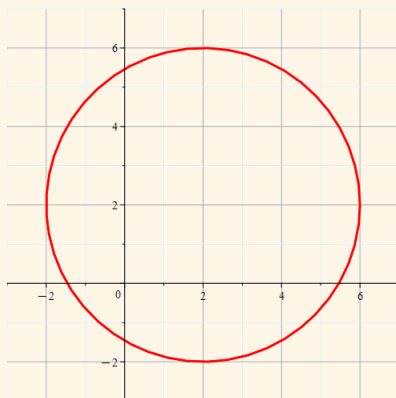
Cirkel ud fra radius og punkt

```
with(geometry) :  
point(C1, [2, 2]) :  
circle(c1, [C1, 4])  
draw([c1, C1], axis = [gridlines, location = origin], printtext = true)
```



Cirkel ud fra tre punkter

```
with(geometry) :  
point(A, -2, 2) :  
point(B, 2, -2) :  
point(C, 2, 6) :  
circle(c2, [A, B, C]) :  
draw(c2, axis = [gridlines, location = origin], view = [-3..7, -3..7])
```

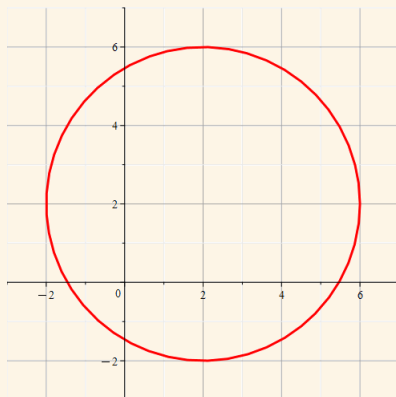


Cirkel ud fra ligning

with(geometry) :

circle(c3, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4^2$, $[x, y]$) :

draw(c3, axis = [gridlines, location = origin], view = $[-3..7, -3..7]$)



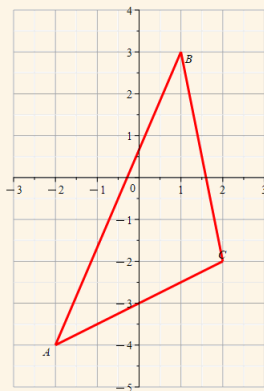
Trekant ud fra tre punkter

with(geometry) :

point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :

triangle(t1, [A, B, C]) :

draw(t1, axis = [gridlines, location = origin], printtext = true, view = [-3..3, -5..4])



Find vinklen mellem to sider i en trekant

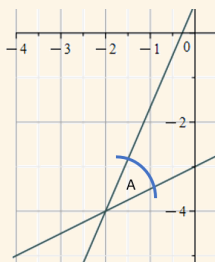
with(geometry) :

point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :

line(l1, [A, B]), line(l2, [B, C]), line(l3, [A, C]) :

FindAngle(l1, l3) = $\arctan\left(\frac{11}{13}\right)$

evalf $\left(\arctan\left(\frac{11}{13}\right) \cdot \frac{180}{\pi}\right) \approx 40.235$



Trekant ud fra tre punkter og dens omskrevne cirkel

with(geometry) :

point(A, -2, -4), point(B, 1, 3), point(C, 2, -2) :

triangle(t1, [A, B, C]) :

circle(c1, [A, B, C])

draw([c1, t1], axis = [gridlines, origin = true], color = [blue, red])

