

SciMath Consulting

Kombinatorik og sandsynlighedsregning med Maple

med brug af Skolepakken 2022

Elevhæfte v. 1.3.2

Juli 2022

Kombinatorik og sandsynlighedsregning i Maple med Skolepakken 2022

Jesper Estrup

Gitte Christiansen

Maja Bassem Nasir Alhilfi

SciMAth 2022

INDHOLDSFORTEGNELSE

- s. 5 - Et ord til læreren.
- s. 6 - Et ord til eleven.
- s. 7 - Om dette hæfte.

-
- s. 8 - Hvad er kombinatorik
 - s. 10 - Multiplikations- og additionsprincipperne
 - s. 13 - n fakultet
 - s. 15 - Ordnet stikprøveudtagelse uden tilbagelægning
 - s. 17 - Ordnet stikprøveudtagelse med tilbagelægning
 - s. 19 - Uordnet stikprøveudtagelse uden tilbagelægning
 - s. 21 - Uordnet stikprøveudtagelse med tilbagelægning
 - s. 23 - Øvelser til kombinatorik.

-
- s. 25 - Sandsynlighedsregning

- De klassiske opgaver

- s.25 - Kast med 2 terninger

- s.28 - Lykkehjulet

- s.31 - Kugler i en pose

- s.34 - Valget

- s. 37 - Øvelser til sandsynlighedsregning

Til læreren!

Hæftet her giver en oversigt over de færdigheder, som elever forventes at mestre jævnfør Undervisningsvejledningen fra Børne- og Undervisningsministeriet, og som med store fordele kan løses i et CAS-program.

Før eleverne kan arbejde med CAS skal de undervises i CAS.

CAS-programmer er komplicerede størrelser, som man ikke kan forvente elever finder ud af, af sig selv - **det er ikke en udvidet lommeregner.**

Et CAS-program skal ikke opleves som en hindring for eleven! CAS skal falde lige så naturligt at anvende som lommeregneren, linealen og blyanten.

Men der er nogle fælder, man som underviser bør undgå; et CAS-program kan fx løse en ligning, men viser ikke hvordan ligningen løses. I Maple kan eleven løse en ligning af enhver slags, uden at eleven behøver at vide hvordan og hvorledes. Med andre ord; det er vigtigt, at forståelsen er tilstede og metoden er gjort begribelig for eleven, før man kaster sig eleverne ud i anvende et CAS-program som Maple - ellers opstår en black-box, hvor eleven stoler på resultatet frembragt af CAS-værktøjet, uden at reflektere nærmere over hvordan eller vide hvorfor.

Når CAS bruges som et værktøj, eller et middel til matematikundervisning og læring, skal du overveje, hvordan CAS bedst bruges sammen med dine andre undervisningsmidler, og være bevidst om, at når du medbringer et nyt værktøj, må organiseringen af undervisningen nødvendigvis ændres.

Vi har afprøvet dette hæfte på elever på 8. og 9. klassetrin, for at sikre os, at sprog og indhold er forståeligt, og eleverne føler, at de kan drage nytte af indholdet.

Vi håber at du og dine elever får udbytte af hæftet.

Hilsen Jesper og Gitte fra SciMath



Foto: N. Azevedo fra unsplash.com

Hej! Vi er glade for at se dig.

Du har fået dette hæfte, fordi du skal lære at bruge CAS-programmet **Maple**. Maple kan du bruge til at arbejde med chancer og sandsynlighed.

CAS er en forkortelse for **C**omputer - **A**lgebra -**S**ystem.

Et CAS-program er et skriveprogram **specielt til matematik**, lige som fx det Word eller Google Docs du bruger til at skrive dansk, tysk eller engelsk i.

Før du går i gang med hæftet, vil vi lige minde dig om, at du skal **arbejde i dit eget tempo**, og **huske at læse, hvad der står på siden!** Det er for at sikre, at du får mest muligt ud af dit selvstudie.

Det er ikke fordi det er svært at bruge **Maple**, men som alt andet kræver programmet øvelse. Også her gælder; **øvelse gør mester!**

Tilbage er bare at ønske **rigtig god fornøjelse**.

Om Dette hæfte

Før vi starter, skal vi tale kort om dette hæftes opbygning, og om nogle af de begreber vi har valgt at bruge.

Dine noter:



Ovenfor på billedet ser du Maples **Arbejdsbord**. Det er her magien sker; det er her du regner, skriver og laver dine grafer, diagrammer og konklusioner.

Paletterne til venstre er dine personlige værktøjer. Dem indretter du selv, så du kan finde rundt i dem - for **Maple** er dit værktøj du tilpasser til dig, ikke et du skal tilpasse dig til.

Den **Kontekstafhængige Menu** til højre, er en dynamisk menu, der foreslår værktøjer, der kan hjælpe dig med at løse dit problem, eller hjælpe dig med dine undersøgelser, alt afhængigt af, hvad du arbejder med på dit **arbejdsbord**.

Hæftet er inddelt i kapitler, der opbygget som opskrifter du kan følge. Vi anbefaler, at du arbejder hæftet igennem, og ellers gemmer det, så du kan bruge det som et opslagshæfte, når du skal undersøge en bestemt opgavetype.

Yderst til højre, har vi gjort pladstil **dine noter**. Et lille tip! Brug forskellige farver tilegnet hvert kapitel, så er det hurtigere at finde rundt i dine egne noter, og nemmere for dig at huske, hvor netop det du skal bruge står henne.

mine egne noter

Hvad er kombinatorik?

At kombinere betyder at sætte sammen på forskellige måder.

I kombinatorik forsøger man at finde ud af, på hvor mange måder et sæt af elementer fra forskellige grupper kan sættes sammen. Du kan også tænke det som en måde at tælle op på!

Kombinatorik handler altså om, hvor mange kombinationer du kan lave ud af forskellige valgmuligheder. Hvis du fx skal udfylde en lottokupon med syv rigtige, eller fx vælge hvordan din pizza skal sættes sammen - kombineres - med dit valg af sodavand, og om du skal have menuen med eller uden pomfritter.

I kombinatorik benytter vi os af begreberne **med** - eller **uden tilbagelægning**, en **ordnet** - eller **uordnet udtagelse**. For at gøre det lettere for dig, har vi sat de forskellige muligheder op i et skema:

	Uden tilbagelægning	Med tilbagelægning
Ordnet stikprøveudtagelse	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet stikprøveudtagelse	$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$	$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}$

Bogstaver og tegn i tabellen skal forstås sådan her:

n er det samlede antal som stikprøven tages fra (eks: der er 5 forskellige slags is, altså er $n = 5$).

r er det antal der udvælges fra stikprøven (eks: der skal laves en is med 2 kugler, altså er $r = 2$).

! læses »fakultet« og betyder; $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1$; (eks: $5! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$; $= 120$)

Hvad er kombinatorik - fortsat

Dine Noter

Alle disse formler er svære at huske, og derfor finder du i Maples skolepakke, forenkledte kommandoer til at hjælpe dig med at huske, hvad du skal gøre.

I Maple erstattes tabellens formler med følgende kommandoer, hvis du har skolepakken installeret:

	Uden tilbagelægning	Med tilbagelægning
Ordnet stikprøveudtagelse	<i>ordnetUden</i>	<i>ordnetMed</i>
Uordnet stikprøveudtagelse	<i>uordnetUden</i>	<i>uordnetMed</i>

Hvis der er tale om en **ordnet stikprøveudtagelse**, betyder det at rækkefølgen har betydning.

Hvis der er tale om en **uordnet stikprøveudtagelse**, betyder det, at rækkefølgen **ikke** har betydning.

Hvis der er tale om en stikprøveudtagelse **uden tilbagelægning**, betyder det, at det udtrukne element kun kan være med én gang.

Hvis der er tale om en stikprøveudtagelse **med tilbagelægning**, betyder det, at det udtrukne element lægges tilbage og kan udtages igen.

I det følgende kapitel, vil vi først gennemgå og vise eksempler på multiplikations- og additionsprincippet. To vigtige principper du skal kende.



Foto: J. Kolpachnikof fra unsplash.com

Multiplikations- og additionsprincipperne

Når man skal tælle antal muligheder, er der nogle få regler, man skal huske på. Nogle af de vigtigste er **multiplikations-** og **additionsprincipperne**.

Multiplikationsprincippet

Lad os starte med at definere multiplikationsprincippet ud fra et eksempel.

Du går ind i en isbutik. Du vil købe en is med én kugle.

- Du kan vælge, om du vil have i bæger eller vaffel.
- Du kan vælge mellem 3 slags is: chokolade, vanille og jordbær.
- Du kan vælge om du vil have syltetøj eller guf ovenpå.

På hvor mange måder (antal muligheder) kan du lave en is med 1 kugle?

Du kan vælge mellem bæger og vaffel. Det kan gøres på 2 måder.

Du kan vælge mellem tre forskellige slags is. Det kan gøres på 3 forskellige måder.

Og, du kan vælge topping på 2 måder.

Når du skal vælge mellem flere muligheder, **både** mellem is, bæger eller vaffel **og** mellem topping (*både- og - princippet*), skal du bruge multiplikationsprincippet.

Med multiplikationsprincippet menes, at du skal gange antallet af muligheder med hinanden.

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

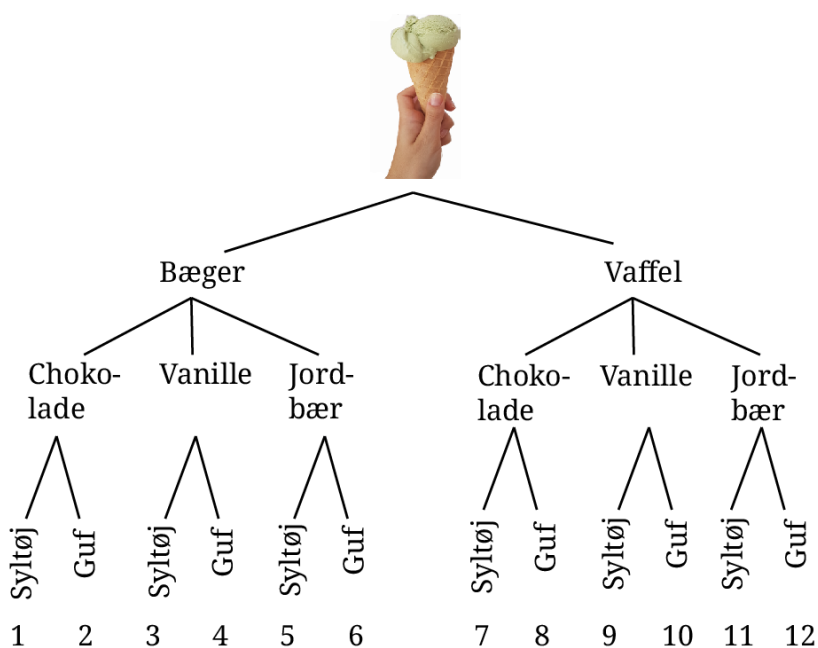
Du kan altså lave 12 forskellige is med én kugle, bæger eller vaffel og topping.



Multiplikationsprincippet - fortsat

Dine Noter

At det virkelig forholder sig således, kan vi anskueliggøre ved at sætte mulighederne op i et såkaldt tælletræ.



Hvis du tæller efter, kan du se, at der er 12 forskellige måder, at sætte de forskellige ingredienser sammen på - man taler om **12 kombinationsmuligheder**.

Det eneste du skal finde ud af er, om det er en **både - og - situation**. Hvis det er en både - og - situation, skal du anvende **multiplikationsprincippet**.

Additionsprincippet

Lad os tage et andet, men simpelt eksempel.

Du skal ind til byen med enten tog eller bus. Der er 3 togafgange og 5 busafgange. Hvor mange muligheder har du for at komme ind til byen?

Svaret er selvfølgelig $3 + 5$, altså 8 muligheder.

Dette er et simpelt eksempel på, hvordan du bruger additionsprincippet.

Når vi **enten** skal foretage et valg 1 (her vælge mellem togafgange) **eller** et valg 2 (her vælge mellem busafgange), skal du lægge sammen (addere) for at få det samlede antal muligheder.

Dine noter

$$3 + 5 = 8$$

For bedre at kunne overskue de otte valgmuligheder, kan vi ligeledes som før sætte dem op i et tælletræ.



Nu kender du de to vigtige principper; multiplikationsprincippet og additionsprincippet.

I mange af de opgaver du vil skulle løse, skal du gøre brug af enten det ene eller det andet princip. For at afgøre hvilket, skal du overveje, om det er et *både-og-princip* eller et *enten-eller-princip*.



Foto J. McKnight fra unsplash.com

n fakultet

Ofte har du brug for at finde ud af, på hvor mange forskellige måder, du kan stille » n forskellige elementer« op.



foto:pixabay.com

Det kunne fx være tre drenge - på hvor mange måder kan Bo, Ib og Per stilles op ved siden af hinanden?

Svaret er : $3! = 6$

Det udtales »3 fakultet« og skrives »3 + udråbstegn«.

Man siger også, at antallet af måder, hvorpå man kan **permutere** 3 forskellige elementer (= sætte i tilfældig række- følge), er $3!$, som er 6.

I matematikken er der også en formel til beregning af antal permutationer:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Men der er altså ingen grund til at bruge denne formel, når du i **Maple** bare kan skrive:

$$n!$$

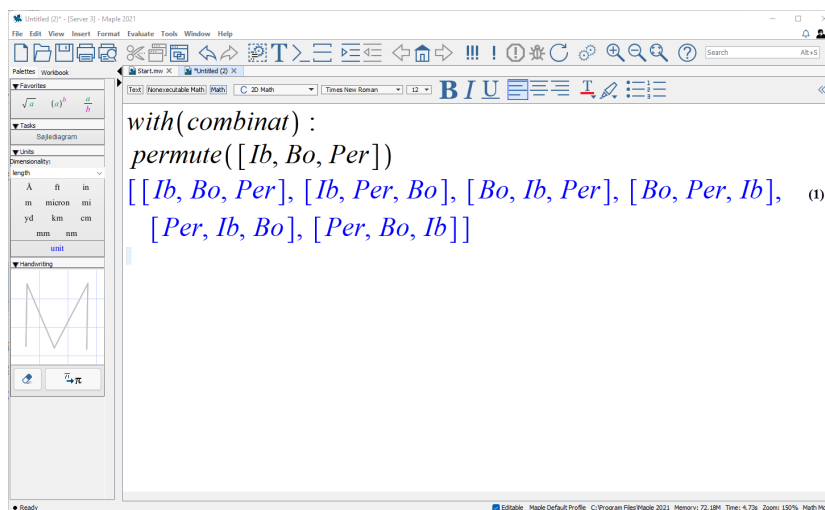
- hvor n står for det antal du har at vælge imellem.

Prøv selv at regne ud, ved at benytte $n!$, på hvor mange måder I, i din klasse, kan stille jer på én lang række.

Dine noter

Skulle du få lyst til at udskrive de 6 forskellige mulige rækkefølger man kan stille de tre venner ved siden af hinanden, kan det gøres via kommandoen **permute** fra pakken **combinat**.

Du kan fx prøve at skrive sådan her i Maple:



Som du kan se, lister Maple alle seks måder op, hvorpå du kan stille de tre venner ved siden af hinanden.

Prøv nu selv, ved at benytte dig af *fakultet* og ud fra følgende oplysninger, at beregne opgaverne i Maple. Facit finder du nederst på siden.

Opg 1: På hvor mange måder kan du stille bogstaverne a,b,c,d op i forskellig rækkefølge?

Opg 2: På hvor mange måder kan du stille bogstaverne a,b,c,d,e op i forskellig rækkefølge?

Opg. 3: På hvor mange måder kan du bytte rundt på et håndboldholds syv spillere?

1. $4! = 24$, 2. $5! = 120$, 3. $7! = 5040$

Ordnet uden tilbagelæg

Endelig begynder vi, at kunne arbejde med skemaet og de kommandoer du finder i skolepakken.

Som du nok husker, har skolepakken et sæt særlige kommando- er til de forskellige udtrækssituationer. De kommandoer er lavet, fordi det kan være svært at huske formlerne til beregningerne.

	Uden tilbagelægning	Med tilbagelægning
Ordnet stikprøveudtagelse	<i>ordnetUden</i>	<i>ordnetMed</i>
Uordnet stikprøveudtagelse	<i>uordnetUden</i>	<i>uordnetMed</i>

Lad os starte med kommandoen *ordnetUden*. Husk, at du ikke kan bruge kommandoen, før du har kaldt skolepakken, ved at skrive *with(skole)*: i Maple

Før vi starter, skal vi være enige om, at ved en ordnet stikprøveudtagelse lægges der vægt på rækkefølgen. En stikprøveudtagelse **uden tilbagelægning** betyder, at et element kun kan vælges en gang, og ikke lægges tilbage og vælges igen.

I en klasse med 20 elever, skal vælges en elevrådsformand og en suppleant.

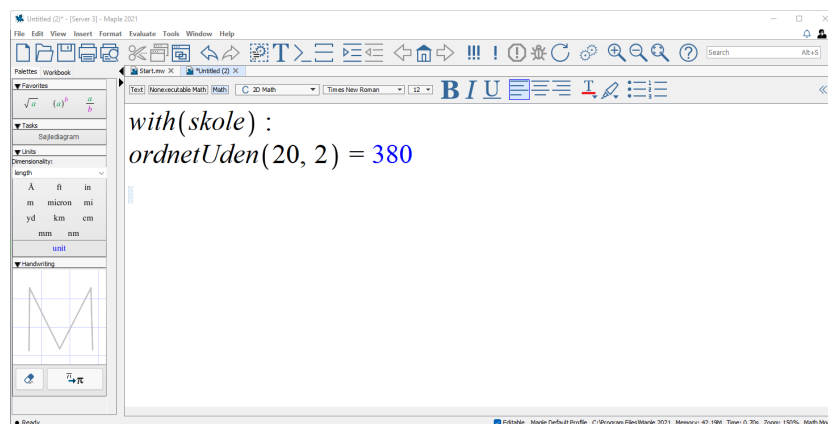
På hvor mange forskellige måder, kan man sammensætte de to elever?

I dette enkle eksempel, er det nemt nok. Klassen kan vælge mellem 20 elever til elevrådsformand, og 19 elever til suppleant - idet det er en **både-og-situation**, ved vi, at vi bare skal gange de to tal med hinanden.

$$20 \cdot 19 = 380$$

Ordnet uden tilbagelægning - fortsat

Benytter vi mulighederne i skolepakken skriver vi følgende:



Du opnår det samme resultat, og kan du spørge dig selv, hvorfor skulle du så bruge kommandoen $\text{ordnetUden}(n, r)$?

Svaret er; i et så simpelt eksempel som dette, behøver du selvfølgelig ikke at gøre det - men dette er et eksempel på noget, der hurtigt kan blive mere kompliceret.

Lad os kigge lidt nærmere på kommandoen $\text{ordnetUden}(n, r)$. Kommandoen skrives i stedet for formelen:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Som du måske husker, står n for antallet af muligheder (her 20 elever), og r står for antal der skal udvælges (her to, en elevrådsformand og en suppleant).

I stedet for at huske formelen, kan du i Maple bare skrive kommandoen **ordnetUden(n,r)**, når du skal udregne kombinationsmulighederne, altså på hvor mange måder noget kan kombineres.

Ved hjælp af kommandoen **ordnetUden(n,r)** i Maple, skal du prøve at regne følgende opgave:

I en klasse på 20 elever, skal der vælges 4 ud; en elevrådsformand, en suppleant, en ordstyrer og en sekretær. På hvor mange måder kan eleverne sammensættes?

facit: 116280

Ordnet med tilbagelæg

Kommandoen **ordnetMed** skrives i stedet for formelen n^r .

n står for antallet af muligheder, du kan vælge imellem.

r står for antallet der skal udvælgjes.

Eksempel

I en klasse skal 4 poster fordeles mellem 20 elever. En elev kan godt have flere poster. På hvor mange forskellige måder kan disse poster fordeles?



Foto: j. Trueba, unsplash.com

Lad os først løse den uden brug af Maple:

Til den første post kan der vælges mellem 20 elever.

Til den anden post kan der vælges mellem 20 elever.

Til den tredje post kan der vælges mellem 20 elever, og
til den fjerde post kan der vælges mellem 20 elever.

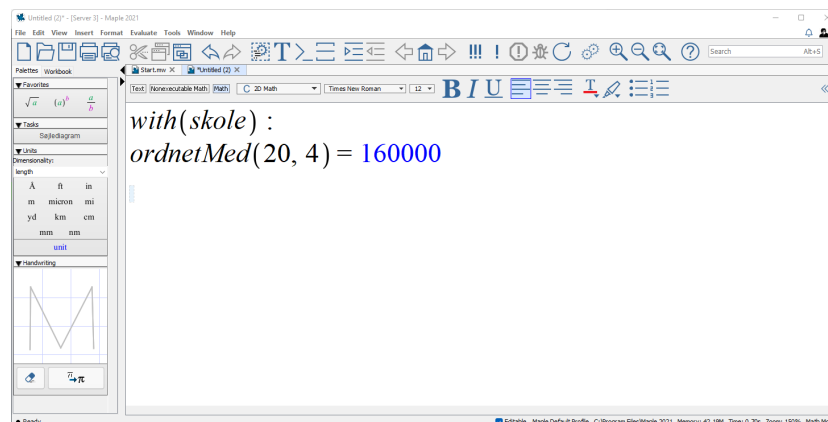
Selv om det muligvis ikke er fornuftigt, kan én elev altså sagtens bestride alle fire poster, altså **både** have post 1 **og** have post 2, derfor ifølge multiplikationsprincippet (både-og-princippet) er antallet af muligheder:

$$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^4 = 160000 \text{ sammensætninger}$$

Dine noter

Ordnet med tilbagelægning - fortsat

I Maple anvendes i stedet kommandoen **ordnetMed(n,r)**, og du skriver:



Prøv ved hjælp af kommandoen **ordnetMed(n,r)**, at udregne følgende opgave:

I en forening skal 3 tillidshverv fordeles mellem 12 medlemmer. Et medlem kan godt have flere tillidshverv. På hvor mange forskellige måder kan disse hverv fordeles?

Prøv at regne efter ved at bruge formelen n^r i Maple eller på en lommeregner.

Facit: 1728 måder

Uordnet uden tilbagelæg

Kommandoen **UordnetUden** skrives i stedet for formelen:

$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

n står for antallet af muligheder, du kan vælge imellem.

r står for antallet der skal udvælges.

Eksempel

I en pose er der fem kugler! En blå, en gul, en hvid, en rød og en grøn. Du udtager nu en stikprøve på 3 kugler uden tilbagelægning.



Rækkefølgen i hvilken kuglerne tages op er uden betydning. Det betyder fx, at der ikke er forskel på rækkefølgen *rød, hvid* og *gul* eller *gul, rød* og *hvid*.

Hvor mange forskellige sammensætninger (kombinationer) kan der forekomme?

Løsning:

{blå, gul, hvid}, {blå, hvid, rød}, {blå, rød, grøn}, {blå, gul, rød},
 {blå, hvid, grøn}, {gul, hvid, rød}, {gul, hvid, grøn}, {gul, hvid, rød},
 {grøn, rød, gul}, {grøn, gul, hvid}

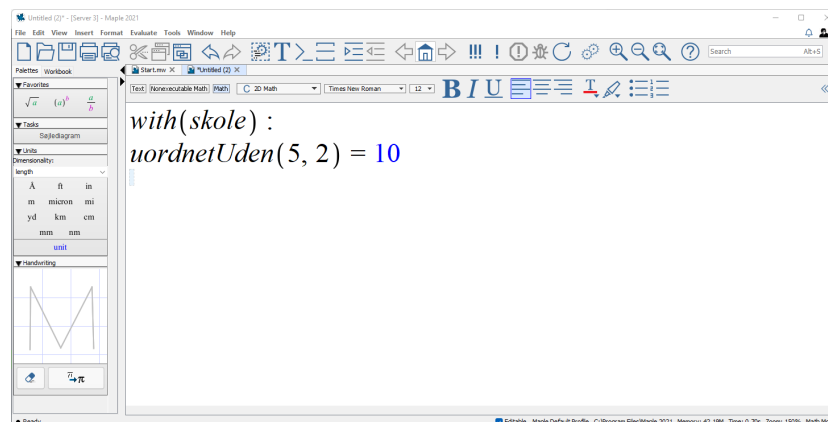
Antallet er ikke flere end man kan foretage en simpel optælling og få at; antal stikprøver = 10. Men det bliver hurtigt klart, at ren optælling er uoverkommelig, hvis mængden er stor.

I Maple benytter vi os af kommandoen: **UordnetUden(n,r)**, og skriver:

```
with(skole):
uordnetUden(5,2) = 10
```

Dine noter

Det ser således ud i Maple.



(I øvrigt, skulle du have glemt det, så behøver du ikke at skrive *with(skole)*: hver gang du skal bruge en kommando. Du behøver kun at skrive det én gang, så husker Maple dit valg af pakke.)

Prøv nu, ved at bruge kommandoen **UordnetUden(n,r)** i Maple, at udregne følgende opgave:



Foto: pixabay.com

1: I en klasse med 15 elever, skal der vælges to til at være fanger. I hvilken rækkefølge de vælges er ligegyldig.

2: Lotto er et eksempel på en **uordnet stikprøve uden tilbagelægning**. Der skal trækkes syv tal ud af 36. Rækkefølgen er ligegyldig, og et tal kan kun trækkes én gang.

Hvor mange kombinationer for 7 rigtige er der i Lotto?

Facit: 1. 105 måder, 2. 8347680 kombinationer

Uordnet med tilbagelæg

I en uordnet stikprøve med tilbagelægning, er rækkefølgen ligegyldig og den samme stikprøve kan udtages flere gange.

Kommandoen **UordnetMed** skrives i stedet for formlen:

$$\frac{(n + r - 1)!}{(n - 1)! \cdot r!}.$$

n står for antallet af muligheder, du kan vælge imellem.

r står for antallet der skal udvælges.

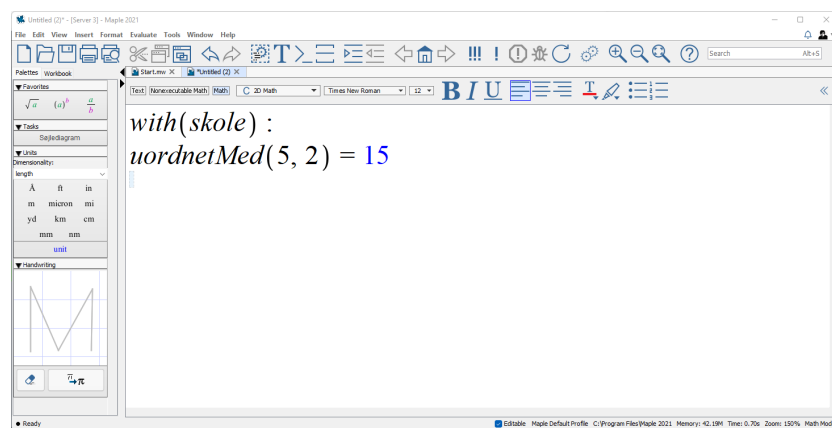
Eksempel

Hvis du f.eks. skal vælge to kugler ud af flg. fem: {rød, gul, hvid, blå, grøn}, så kan du godt vælge en hvid kugle to gange, fordi den bliver lagt tilbage.

Du kan også vælge en rød og en gul, hvilket ville være det samme som en gul og en rød, fordi rækkefølgen er underordnet.

Hvor mange kombinationer er der så?

I Maple bruger du kommandoen **uordnetMed(n,r)**, og skriver:



Der er altså 15 forskellige kombinationsmuligheder.

Dine noter

Prøv at regne opgaven ved at bruge Maple.



Forto: Mircea, unsplash.com

En fodboldkamp er blevet vundet 5-0. En fodboldspiller kan godt score flere mål i samme kamp, og rækkefølgen for målene er ikke vigtig.

Der er 11 spillere på banen til at fordele de 5 mål i mellem sig. På hvor mange måder kan målene scores?

Facit: 3003 måder

Øvelser

Dine noter



Foto: J. Thomas, unsplash.com

Før du arbejder videre med anden del som handler om, hvordan du beregner sandsynligheder med Maple, vil det være en god idé at afprøve din viden på nogle opgaver.

På den måde sikrer du dig, at du har forstået, hvad det hele gik ud på!

Det betyder, at du til hver opgave skal gøre dig nogle overvejelser; er det med eller uden tilbagelægning, er det med eller uden betydning for rækkefølgen? Skal du bruge multiplikationsprincippet? Eller måske additionsprincippet?

For hver opgave, skal du gøre dig disse overvejelser - har du fundet den rigtige, klarer Maple resten.

Lad os gå i gang...

1. På hvor mange måder, kan du opstille fem personer på række?
2. Ud af en gruppe bestående af ni drenge og tre piger, skal der vælges fire personer til at handle ind.
På hvor mange måder kan de fire personer vælges?

Facit: 1. 120, 2. 495

Dine noter

Opgaver til del 1 - fortsat

3. Et kærestepar har 11 gode venner, som de gerne ville invitere til middag. Da deres lejlighed er meget lille, har de kun plads til at invitere fem.

På hvor mange måder, kan de udvælge de fem venner?

4. På et møde i en boligforening deltager 10 personer. Der skal vælges en ordstyrer, en bogholder og en formand til boligforeningen. På hvor mange måder kan man vælge deltagere til de tre poster, når en person gerne må vælges til at bestride flere poster?

5. På hvor mange måder, kan du udtage fem basketballspillere af en trup på ni, når alle positioner kan være i spil?



Foto: Pixabay.com

Klaredes du alle opgaverne? Super!

Nu hvor du har kombinatorikken på plads - og fordi det er grundlaget for sandsynlighedsregning - skal du til at lære et par tricks, du kan anvende til at beregne sandsynligheder med i Maple.

I det følgende kapitel, viser jeg dig nogle metoder til udregning, du afprøver dem et par gange, og lærer at tilføje dem til dine *Tasks*.

Giv dig selv et klap på skulderen - det fortjener du!

Facit: 3. 462, 4. 220, 5. 15120

Sandsynlighedsregning

Sandsynlighedsregning bygger på, at du ved, hvor mange kombinationsmuligheder en valgmulighed har.

I stedet for sandsynlighed, kan man bruge ordet **chancen**.

I stedet for valgmuligheder, bruger man også ordet **udfaldsrum**.

Fx ved vi fra vores tidligere beregning, at Chancen for at vinde i den store gevinst i lørdags-lotto er:

$$\frac{1}{8347680} (\approx 0,000012\%)$$

Du skal kombinere syv rigtige tal ud af 36, og kun én af de 8347680 kombinationsmuligheder giver den fulde gevinst.

Vi vil i det følgende eksempel kigge på en typisk opgavetype, der varierer, og bliver varieret, utallige gange.

Kast med to terninger.

Lad os tage udgangspunkt i kast med to terninger, og undersøge følgende tre scenarier;

- 1) Hvad er Chancen for, at få netop to femmere?
- 2) Hvad er Chancen for, at summen af øjnene højst er fire?
- 3) Hvad er Chancen for, at slå mindst en femmer?

Find udfaldsrummet

Før vi kan undersøge de tre scenarier, bliver vi nødt til at fastlægge **udfaldsrummet**.

Vi går ud fra, at de terninger er ens. Det betyder at udfaldet $\{a,b\}$ er det samme som $\{b,a\}$ (fx $\{5,1\}$ og $\{1,5\}$ er ens udfald). Rækkefølgen er altså uden betydning (**uordnet**).

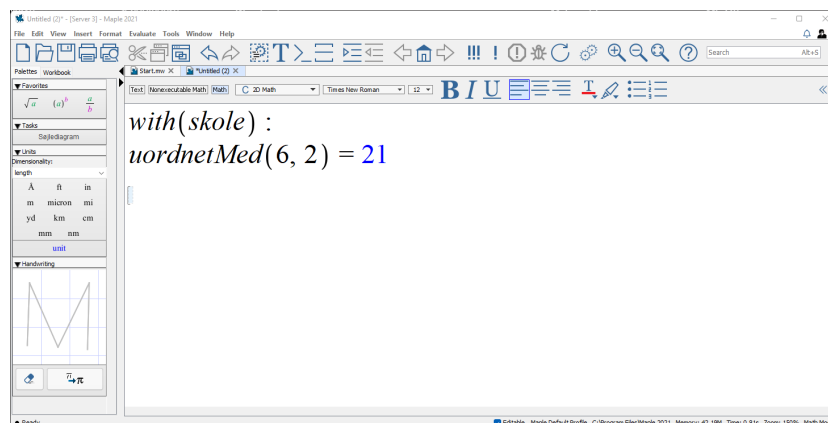
Vi kaster én gang med to terninger, men da de to terninger er ens kunne vi lige så godt kaste med én terning to gange - derfor er det **med tilbagelægning** (tallene fra 1 - 6 bruges to gange).

Din noter

Kast med terninger - fortsat

Ved at bruge kommandoen: **uordnetMed(6,2)**, finder vi, at udfaldsrummet er 21.

I Maple ser det således ud:



Vi arbejder med udfaldsrummet

1) Hvad er chancen for, at få netop to femmere?

Hvis vi kaster med to terninger, er der kun ét udfald, hvor resultatet er to femmere. Chancen er derfor:

$$\frac{1}{21} \approx 4.76\%$$

2) Hvad er chancen for, at summen af øjnene højst er fire?

Følgende kombinationsmuligheder er mulige (vi husker at udfaldet $\{a,b\}$ er det samme som $\{b,a\}$):

$$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,2\}$$

- altså i fire ud af 21 tilfælde:

$$\frac{4}{21} \approx 19.05\%$$

3) Hvad er chancen for, at slå mindst én femmer?

Følgende kombinationsmuligheder er mulige (vi husker at udfaldet $\{a,b\}$ er det samme som $\{b,a\}$):

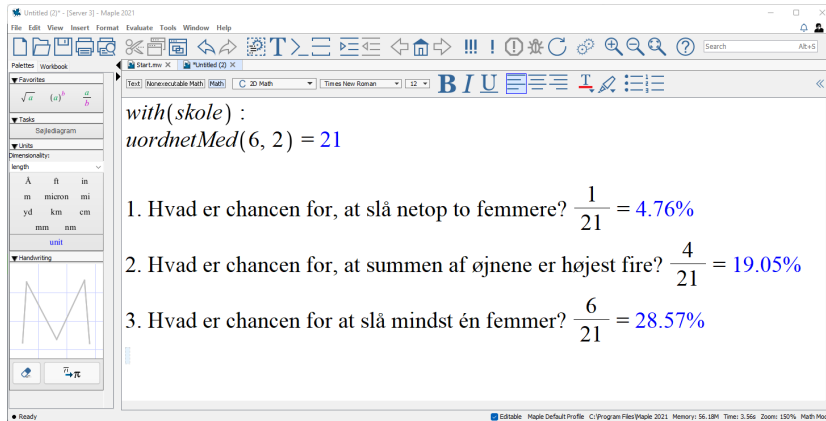
$$\{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{5,5\}, \{6,5\}$$

Kast med to terninger - fortsat

- altså i 6 ud af 21 tilfælde:

$$\frac{6}{21} \approx 28.57\%$$

Udregningerne i Maple ser ud som følgende:

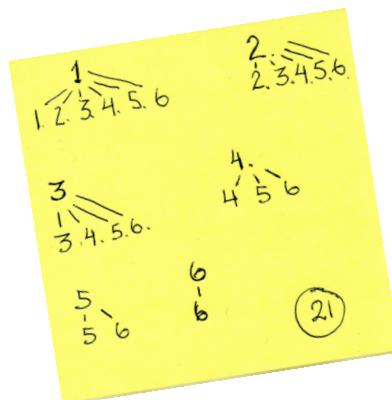


Overvejelser

Det sværeste i denne opgave, og derfor er den taget med, er at fastlægge antallet af valgmulighed - det vi kalder for udfaldsrummet.

Den sværeste overvejelse du skal gøre dig her, er at finde ud af, om det er **med-** eller **uden tilbagelægning** - mange falder i, og beregner udfaldsrummet *uden tilbagelægning*, hvilket reducerer udfaldsrummet til 15!

Det gælder altså om, at analysere situationen og tænke sig godt om! Du kan evt. overveje opgaven ved at »tegne« ...



Sandsynlighedsregning - et nyt eksempel

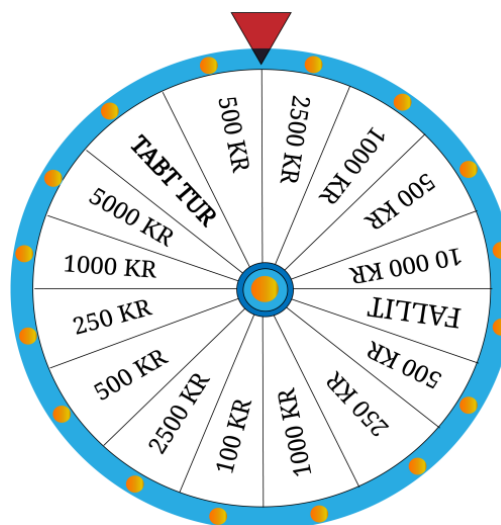
Vi vil slutte af med at kigge på tre »klassiske opgaver«, som ligeledes varieres i det uendelige. En type opgaver du vil støde på i den ene eller anden forklædning.

Derfor kig de tre følgende eksempler godt igennem, så du kan genkende dem - også i deres forklædninger!

Som altid, skal du først overveje antallet af valgmuligheder (udfald)!

Lykkehjulet

Lykkehjulsopgaver er en »klassisk type« af opgaver, der svarer lidt til kategorien med spørgsmålet; hvad er chancen for at trække et es fra en bunke med 52 kort, eller at kuglen stopper på et bestemt felt i roulette?



Et lykkehjul er inddelt i 16 felter. I hvert felt står enten et tal, eller teksten *Fallit*, hvilket betyder du taber alle de penge, du har vundet, eller teksten *Tabt Tur*, hvilket betyder, at du beholder alle dine penge, men turen går videre til næste spiller.

Hvis lykkehjulet standser således at pilen peger på beløbet 500 kr, vil vi sige at udfaldet »500 kr.« er indtruffet.

Vi skal nu prøve at udregne chancen for tre forskellige udfald;

1. Hvor mange chancer er der for, at udfaldet 100 kr. indtræffer?

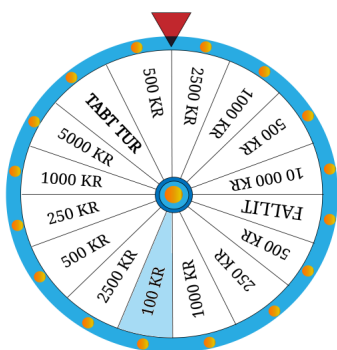
Dine noter

2. Hvad er chancen for at udfaldet er større end 1000 kr?
3. Hvad er chancen for **ikke** at lande på feltet *Fallit* eller *Tabt Tur*?

Vi arbejder med udfaldsrummet

Igen skal du overveje, hvor mange forskellige valgmuligheder, dvs. udfald du har. Her er det forholdsvis nemt at tælle, og finde ud af at pilen kan stoppe på et af de 16 felter - altså er der 16 udfald.

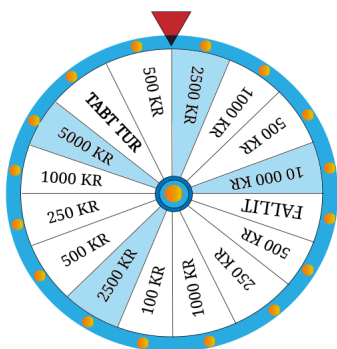
1. Hvor mange chancer er der for, at udfaldet 100 kr. indtræffer?



Der er kun ét felt med beløbet 100 kr påtrykt, derfor er chancen for at lykkhjulet stopper på netop dette felt:

$$\frac{1}{16} \approx 6,25\%$$

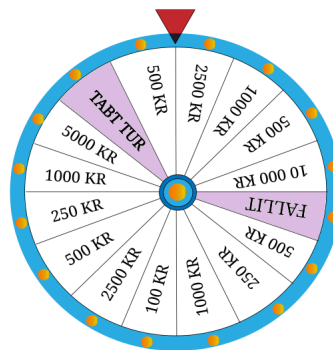
2. Hvad er chancen for at udfaldet er større end 1000 kr?



Der er fire felter pilen kan stoppe ved, hvor værdien er mere end 1000 kr. Udfaldsrummet er; {2500 kr, 2500 kr, 1000 kr, 10.000 kr}

$$\frac{4}{16} = 25\%$$

3. Hvad er chancen for **ikke** at lande på feltet *Fallit* eller *Tabt Tur*?



Opgaven kan angribes på to måder. Enten ved at tælle, hvor mange felter der ikke står Fallit eller Tabt Tur på (14 ud af 16 felter). Eller som vi gør her, at trække de 2 felter ud af 16 fra 1.

$$1 - \frac{2}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Alle tre opgaver ser således ud i Maple.

1. Hvor mange chancer er der for, at udfaldet 100 kr. indtræffer?

$$\frac{1}{16} = 6.25\%$$

2. Hvad er chancen for at udfaldet er større end 1000 kr?

$$\frac{4}{16} = 25\%$$

3. Hvad er chancen for **ikke** at lande på et af felterne *Fallit* eller *Tabt Tur*?

$$1 - \frac{2}{16} = 87.50\%$$

Kugler i en pose

Dine noter

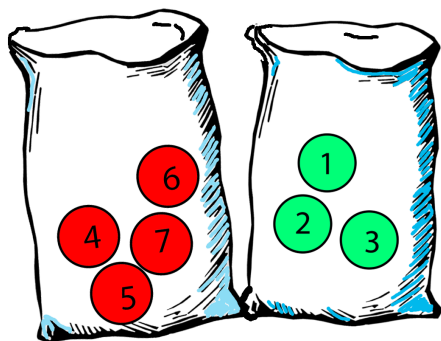


Foto: C. Jarvis, unsplash.com

Den næstsidste af de tre klassiske opgaver, som du ofte vil støde på i forskellige variationer, er udtræk fra en pose - en kugle, en sten etc.

Foran dig ligger to poser på et bord. I den ene pose er der tre grønne kugler, med hver sit af tallene 1, 2 og 3.

I den anden pose ligger fire røde kugler, med hver sit af tallene 4, 5, 6 og 7.



Du får bind for øjnene og skal trække først en grøn og derefter en rød kugle.

Tallet på de to udtrukne kugler danner et tocifret tal tilsammen, fx 14 eller 27.

1. Hvor mange mulige udfald er der?
2. Angiv mængden af forskellige udfald.

Dine noter

3. Hvor stor er sandsynligheden for at 26 indtræffer?
4. Find sandsynligheden for, at tallet er mindre end 36.

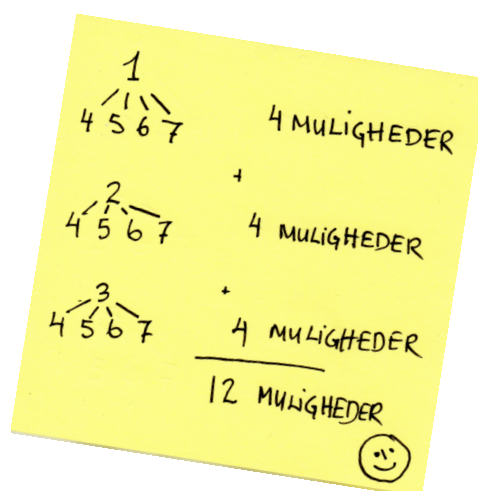
Overvejelser

Først skal vi overveje, hvordan vi fastlægger antallet af mulige udfald. Vi tager en kugle op ad gangen, én fra hver pose, og lægger den ikke tilbage.

Vi tager altså en kugle **både** fra posen med de røde kugler **og** posen med de grønne kugler.

Da vi har en både-og situation, skal vi anvende multiplikationsprincippet. Altså er antallet af udfald $3 \cdot 4 = 12$.

Hvis vi *tegner vores overvejelser*, ville et tælletræ være en oplagt metode:



Efter vi først har overvejet og fastlagt vores udfaldsrum, kan vi starte på at arbejde med de forskellige opgaver.

Vi arbejder med udfaldsrummet

1. Hvor mange mulige udfald er der?

Da vi har en både-og situation, skal vi anvende multiplikationsprincippet. Altså er antallet af udfald $3 \cdot 4 = 12$.

Dine noter

2. Angiv mængden af forskellige udfald.

Her hjælper mine tegnede overvejelser med et overblik.

$$\text{Mulige udfald} = \{14, 15, 16, 17, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37\}$$

3. Hvor stor er sandsynligheden for at 26 indtræffer?

Vi kan af vores tælletræ se, at hændelsen forekommer netop én gang, derfor er sandsynligheden:

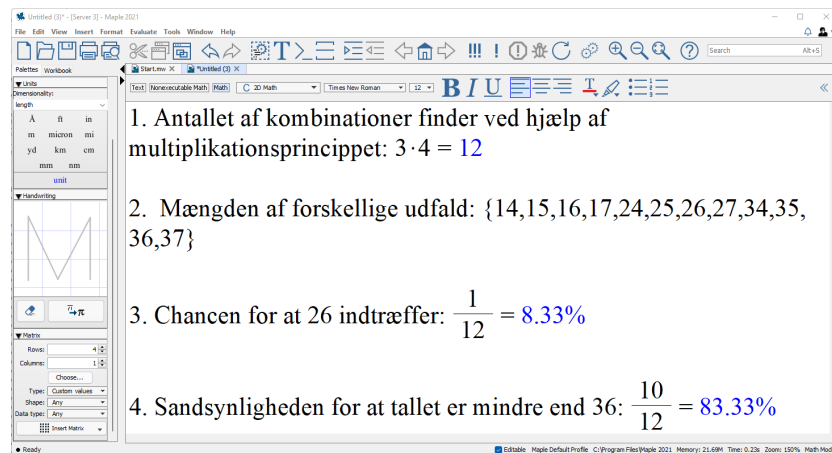
$$\frac{1}{12} \approx 8,33\%$$

4. Find sandsynligheden for, at tallet er mindre end 36.

Tælletræet viser os at hændelsen forekommer i 10 ud af tilfælde, derfor er sandsynligheden:

$$\frac{10}{12} \approx 83,33\%$$

De fire udregninger ser således ud i Maple:



Valget

I en klasse bestående af ni drenge og tre piger, afholdes der valg til elevrådet.

Der skal besættes fire poster. En elev kan ikke vælges til flere poster.



Foto: NeONBRAND, Unsplash

1. På hvor mange måder kan man vælge de fire elever?
- Hvor mange muligheder er der, hvis;
- 2... **mindst** én af eleverne skal være en pige?
3. ...at der **netop** skal være én pige?
4. Hvad er sandsynligheden for, at der vælges **højst** én dreng?

Overvejelser

Ud fra eksemplet, må vi forstå det således, at en elev kun kan vælges til og besætte én post, altså er udtrækningen **uden tilbagelægning**. Rækkefølgen må være **underordnet**, idet vi ikke får at vide, at der er en rækkefølge, som fx at først skal elevrådsrepræsentanten vælges, dernæst suppleant osv.

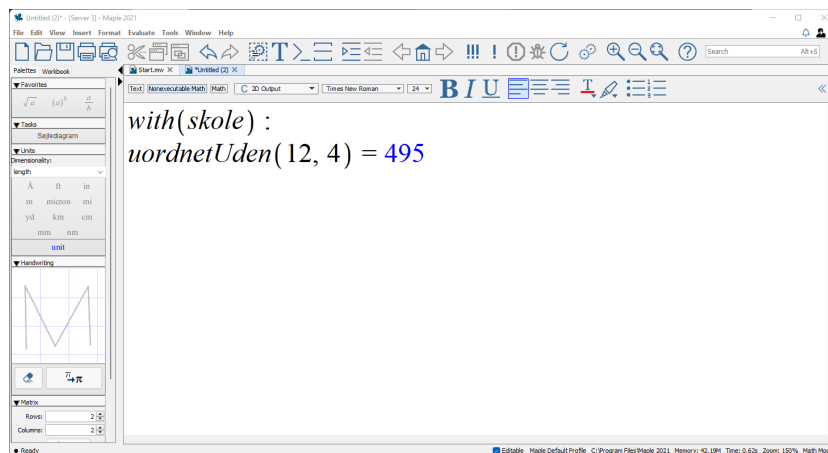
Dine noter

Det må betyde at det er en **uordnet** stikprøveudtagelse **uden tilbagelægning**.

Det kan vi skrive i Maple således:

$$uordnetMed(12,4) = 495$$

Det ser således ud i Maple:



Efter vi har fastlagt udfaldsrummet, kan vi begynde at arbejde med opgaverne.

Vi arbejder med udfaldsrummet

1. På hvor mange måder kan man vælge de fire elever?

Vi kan udtrække de 4 elever på;

$$uordnetMed(12,4) = 495 \text{ måder.}$$

2. Hvis mindst én af eleverne skal være en pige, kan de fire udvælges på:

$$uordnetMed(12,4) - uordnetMed(9,4) = 369 \text{ måder}$$

... idet vi ved at trække de ni drenge ud af det samlede antal, sikrer os, at **mindst** en pige bliver valgt.

3. Hvor mange muligheder er der, hvis at der netop skal være én pige?

Dine noter

Det betyder at netop en post er besat af en pige, de tre andre poster skal besættes af drenge.

Vi skal både have en pige **og** tre drenge. Derfor skal vi anvende multiplikationsprincippet.

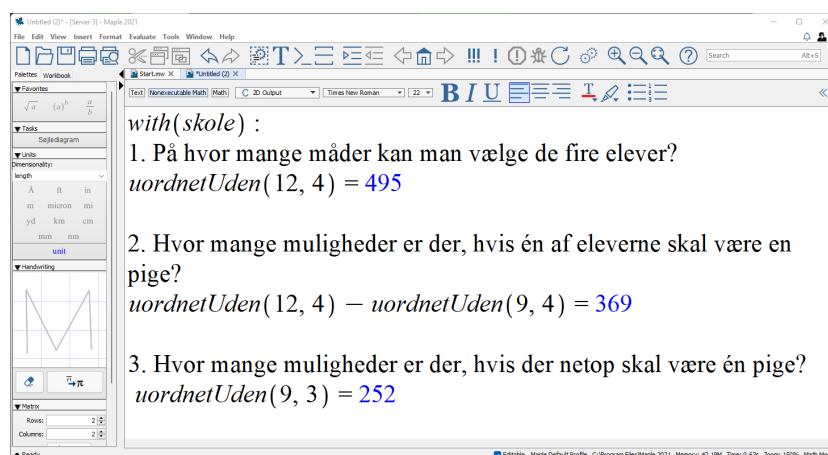
Pigen kan trækkes på 3 måder, de tre drenge på 126 måder.

$$3 \cdot \text{uordnetMed}(9,3) = 252 \text{ måder.}$$

4. Hvad er sandsynligheden for, at der vælges netop én dreng?

Egentlig behøver vi ikke at regne opgaven. Der er fire poster, men kun tre piger i klassen, så mindst én af posterne vil blive besat af en dreng - derfor er sandsynligheden = 100%

Opgaverne ser således ud i Maple:



Afrunding

Flot at du har hængt på hele vejen her til! Du har gennemgået både kombinatorik og eksemplerne med sandsynligheder, eller som vi har skrevet nogle gange; chancer.

Vi har prøvet at gøre det klart, at det svære og vigtige er at klargøre udfaldsrummet først. Vi håber at det er lykkedes os.

Tilbage er der kun at øve sig. Vi har tilføjet nogle opgaver med facit - se om du kan løse dem!

Hilsen Jesper, Gitte og testeleve Maja.

Afsluttende opgaver til hæftet

Dine noter

1. I en klasse er tre drenge og tre piger alle interesseret i at komme med i festudvalget.

Klassen beslutter, at der skal være én dreng og én pige i festudvalget.

a. Hvor mange kombinationsmuligheder er der?

b. Hvad er sandsynligheden for at en pige bliver udtrukket?

c. Hvis klassen beslutter sig for, at der gerne må være to af samme køn i festudvalget, hvor mange kombinationsmuligheder er der så?

a. 9, b. $\frac{3}{4}$, c. 15



pixabay.com

2. En mønt kastes tre gange. Efter hvert kast skrives ned, om det er plat eller krone.

a. Hvor mange kombinationsmuligheder er der?

b. Hvad er sandsynligheden for at få Krone tre gange i træk?

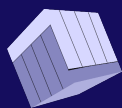
a. 8, b. $\frac{1}{8}$

3. To venner skal i biografen. I biografens kiosk kan de vælge mellem ni forskellige poser slik, et bæger med popcorn eller bacon- chips og fire forskellige slags sodavand.

De beslutter sig for at købe en pose slik, et bæger med enten popcorn eller baconchips og en sodavand.

a. Hvor mange forskellige valgmuligheder har de?

a. 72



SciMath Consulting

Elevhæfte v. 1.3.2

Juli 2022